復刊

アーベル群・代数群

本田欣哉・永田雅宜 著

共立出版株式会社

序

広い意味で「群論」といわれるものの中で，今日とくに活発に研究されているものは，有限群論，アーベル群論，代数群論，リー群論の四つであろう．

これらの間には，群としての共通性は大いにあるけれども，他面，目標とする方向と，とりあつかう手法のいずれの面においても，大きな差異が認められる．これらのうち，アーベル群と代数群とを，本書で解説することになったが，その差異のゆえに，2名の筆者が別々に筆を進めた．そのため，前半と後半との間で，形式や文章の調子など，相当ちがっている点については，読者の御了承をいただきたい．

アーベル群論と代数群論の一方だけを選んだとしても，詳しい理論を紹介するのには，本書一冊分のページ数では到底足りない状態であるので，本書は，もっぱらこれら二分野への良き入門書となることを目標にして執筆された．しかし，国際的にきわめて活発に研究されているにもかかわらず，これまで邦書ではほとんど紹介されなかった分野の書物として，本書の出版は，やはり相当の意義があるものと信ずる．

本書が読者に，アーベル群論や代数群論のおもしろさの，一端なりとも紹介することができて，同好の士が増加することになれば，大変嬉しいことに思うのである．

最後に，本書の出版に当って，いろいろお世話になった方々，とくに編集委員の赤摂也氏と一松信氏，共立出版株式会社の坂野一寿氏に対し，ここに謝意を表しておきたい．

1969 年 1 月

著　者

目　　次

アーベル群

まえがき

第1章　部分群の順序関係

第2章　有限的操作

第3章　可算的操作

第4章 超 限 的 操 作

第5章 ウルムの定理，コレチスの定理

第6章 クリコフの定理

代 数 群

ま え が き

第1章 代 数 群（1）

第2章　代　数　群（2）

第3章　アフィン代数群

第4章　Abel 多 様 体

付録1　不　変　元

付録 2 交 換 群

付録 3 外積環と Plücker 座標

アーベル群

本田 欣哉 著

まえがき

アーベル群とは，算法がつねに可換律 $ab=ba$ を満足する群のことである．群論のむつかしさは，可換律が成り立たないところからくる面が大きいから，アーベル群論は，やさしくて，あまり研究する価値がない，とも考えられるのである．事実，第二次大戦の前には，研究者の数も少なかった．

戦後，ソ連の群論学派の影響で，無限群の研究が活発になるや，(無限) アーベル群は，にわかに多くの研究者をもつようになった．とくに，ハンガリーのフックスの著書 Abelian Groups (1958) の影響は，はなはだ大きかった．アメリカ，ソ連，ハンガリー，ポーランドなどに，非常に多くの若手研究者が現われた．もともときわめて基礎的な概念であり，当然，十分に研究さるべき対象だったのである．そして，研究して見ると，多くの興味ある結果が次々と得られ，しかも，未解決の重要難問にもこと欠かない．アーベル群をテーマとした国際会議も，何度かもよおされている．

本書 (アーベル群の部) は，このアーベル群論への入門書である．前半の三章では，基礎的な理論を，十分ていねいに述べた．しかし，これまでの諸書とちがったフレッシュな感じを出すために，相当の工夫をこころみた．すなわち，第1章では，群の元の整数倍をとるという操作をまったく排除して，部分群の包含関係による順序と，それによりなす束だけを舞台にのせた．この章で中心をなすのは，本部分群と粋部分群の二概念である．(粋部分群のほうは，1956年に著者が導入したものであるが，ここでは，本部分群を使った新しい定義を用いた．) 第2章ではじめて，群の元の整数倍をとる操作を導入し，基本的な諸

定理を証明したが，やはり本部分群と粋部分群とをできるだけ活用して，システマチックに理論を展開するように努めた．第3章では，巡回群の直和になる群に関するクリコフの定理と，基部分群に関する諸定理とを，統一的な方法で処理するため，相補的な基と主基という二概念を基礎においた．このやり方も，新しいこころみである．(この二概念は，互いに一方から他方が導かれるという関係にある．しかし両者を併用するほうが，理論が透明になるのである．)

後半三章のテーマは，p-群の構造論である．とくに同型問題と存在問題に焦点をしぼり，第5章で前者を，第6章で後者をとりあつかった．第4章はその準備である．大体の叙述はフックスの名著に従ったが，細部に多くの補充や補正を加えて，読者の理解を容易にするように努めた．また，コレチスの定理など，最近の諸結果も加えられている．

以上のほか，アーベル群論には，ねじれのない群の理論とか，ホモロジー代数との関連など，多くの重要な部門がある．将来アーベル群論の研究をこころざされる方は，もちろんひきつづきフックスの書物をおよみになるべきであるが，教養として勉強をされる方には，本書が一応の役に立つであろうと考えるのである．

——記号表——

$\{S\}$：群 G の部分集合 S から生成される G の部分群（p. 7）

$A\vee B$：A と B の和集合（p. 9）

$A\cup B$：部分群 A, B の（束論的）結び（1·2 節）（p. 9）

$A\cap B$：A と B の共通部分（p. 9）

$O(g)$：元 g の位数（p. 19）

$E(g)$：元 g の指数（2·1 節）（p. 19）

$H(g)$：元 g の高度（2·1 節）（p. 21）または超限的高度（4·1 節）（p. 61）

$|A|$：A の濃度（p. 8）

$r(G)$：G の階数（2·7 節）（p. 36）

$U_G(\alpha)$：G の α 番目のウルム不変数（4·2 節）（p. 61）

$m\nmid n$：整数 m は整数 n を割らない

第 1 章　部分群の順序関係

この章では，主として部分群の間の順序関係を中心とした，アーベル群論の基礎知識を述べる．1·1 節では，予備知識の要約として，群や順序集合などの諸定義や基礎的諸定理の（証明をはぶいた）復習を行ない，1·2 節では，部分群の包含関係による順序から導かれる，完備なモジュラー束について述べる．1·3 節から，本来のアーベル群論にはいって行くのであって，まず本部分群や本包を定義し，次にその本包を使って粋部分群を定義する．普通には，任意の素数 p につき $pH=H\cap pG$ なる，群 G の部分群 H として，したがって，ある元の整数倍という操作を基礎として定義された粋部分群の理論を，そういう操作を排除して，純粋に順序論的に展開して行くのは，一見技巧的にも見えるけれども，このやり方のほうが，理論的に透明で，かつ環 R 上の加群にも拡張できるためである．粋部分群と高部分群との関係は，1·3 節で示される．1·4 節では，直和の理論の大要と，絶対直和因子と 1·3 節の議論との関連を述べる．普通の群論での直積分解と比較して，アーベル群論では，直和分解という操作がはるかに重要である．

1·1　最少限の予備知識

木書を読むためには，ほとんど予備知識を必要としないけれども，群論のごく初歩（たとえば成田 [13]）と，順序集合，束，ツォルンの補題，集合の濃度や順序数などについて，ことばの定義くらいは知っておいていただきたいのである．念のために，以下その要点を述べよう．

A．群 G の任意の 2 元 a, b*) に対し，（算法が乗法の場合）可換律 $ab=ba$ が成立するとき，G は**アーベル群**（Abelian group）または可換群という．このような群はしばしば算法を加法で記し，ab の代わりに $a+b$ と書く．アーベル群論をテーマとする本書では，簡単のため，加法で書かれたアーベル群のことを，単に群とよぶことにする．したがって，群 G とは，空でない集合であって，その任意の 2 元 a, b に対し，その和 $a+b$ が G の元として一意的に定まり，結合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ と可換律 $a+b=b+a$ がすべての元 a, b, c につき成り立ち，G の任意の元 a につき $a+0=a$ を満足する元 0（零元）

*) $a=b$ のこともある．2 元というとき，今後も同様．

が存在し，また，任意の元 a に対し，$a+(-a)=0$ を満足する元 $-a$（a の逆元）が存在する．零元は唯一つだけあり，任意の元に対し，その逆元も一意的に定まる．$a+(-b)$ は $a-b$ と書かれる．有限個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_k$*) の和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ も，結合律を用いて，括弧づけに無関係に一意的に定義される．なお便宜上空集合の和は0と定義することにする．

群の準同型写像や同型写像についても，読者は御存知であろう．G, H を二つの群とし，GからHの中への写像をφとする．Gの元aのφによる像を φa で表わすとき，任意の2元 a, b に対し

$$\varphi(a+b)=\varphi a+\varphi b$$

となるのが，すなわち準同型写像である．とくに，写像が一対一写像（単射），すなわち，$a\neq b$ なら $\varphi a\neq\varphi b$ なら，同型写像である．GからHの上への同型写像があるとき，GとHは同型であるといい，$G\cong H$ で表わす．

群Gの空でない部分集合Hが，Gでの算法につきやはり一つの群をなすとき，G の部分群という．その条件**)は，H の任意の2元 a, b に対し，$a-b\in H$ なることである．G自身も，また零元0だけからなる部分集合（やはり0で表わす）も，Gの部分群である．Gと異なるGの部分群を，Gの真部分群という．

群 G に一つの部分群 H が与えられると，H により G の元を剰余類にわけることができる．すなわち，Gの2元 a, b が $a-b\in H$ を満足するとき，$a\equiv b$ (mod H) と書き，このような a, b を一つの類に集めて，Hを法とした剰余類という．元 a をふくむ剰余類は，$a+H$（$a+h$, $h\in H$ の全体）の形に表わされる．剰余類の全体 G/H は，算法

$$(a+H)+(b+H)=(a+b)+H$$

により群をなし，群Gの部分群Hによる剰余群（または因子群）という．Gの各元aに $a+H$ を対応させて，Gから G/H の上への準同型写像が得られる．

群 G から群 $\bar{G}$ の中への準同型写像 φ が与えられれば，φG（φa, $a\in G$ の全体）は $\bar{G}$ の部分群をなす．$\varphi a=0$ なる $a\in G$ の全体はGの部分群Kをなし，φの核とよばれる．G/K は φG と同型である．

---

*) 同じ元の重複も許す．したがって，集合 $[1, 2, \cdots, k]$ からGの中への写像にほかならない．本書では，正確には，Gにおける（あるいは，Gの元の）有限列と称する．

**) 簡単のため，必要十分条件のことを，本書では単に条件と記す．

群Gの一つの部分集合をSとするとき，SをふくむGの部分群全部の共通部分は，Gの部分群でかつSをふくむ．これを $\{S\}$ と記し，S から生成されたG の部分群という．それは S における任意二つの有限列の和 $s_1+s_2+\cdots+s_k$, $s'_1+s'_2+\cdots+s'_l$ から差

$$(s_1+\cdots+s_k)-(s'_1+\cdots+s'_l)$$

をとったもの全体より成る．したがって，もしSの任意の元の逆元がSにふくまれるなら，Sにおける任意有限列の和 $s_1+s_2+\cdots+s_k$ の全体より成る．

とくに，$G=\{S\}$ なるとき，GはSから生成されるといい，SをGの**生成団**という．

B． **順序集合**Mとは，2項関係$\leqq$が定義された集合で，

（i） $a\leqq a$（すべての $a\in M$ につき），

（ii） $a\leqq b$, $b\leqq a$ なら $a=b$,

（iii） $a\leqq b$, $b\leqq c$ なら $a\leqq c$

の3条件を満たすものである．$a\leqq b$ は $b\geqq a$ とも書かれる．$a\leqq b$ で $a\neq b$ なら $a<b$ と書き，aはbより小という．M の任意の部分集合 A は，同じ順序関係（をAだけに制限したもの）により，やはり順序集合をなす．順序集合の部分集合を考える場合，常にこの意味の順序集合と見なすのである．一つの順序集合の任意の2元 a, b に対し，$a\leqq b$ か $b\leqq a$ の少なくとも一方が成立するとき，**全順序集合**という．

順序集合 M の部分集合Aに対し，M の元 l がAの**下界**とは，Aの任意の元 aに対し，$l\leqq a$ なることである．部分集合でなく，Mの元の族 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$*) についても，この族から得られる$M$の部分集合**) の下界を，族 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の下界という．（このように，元の族にも，部分集合にも，全く同様に定義される概念は，今後，どちらか一方についてだけ定義しよう．）M の部分集合Aの**下端** a_0 とは，Aの下界であって，かつ，Aの任意の下界 l に対し，$l\leqq a_0$ なるもの，すなわち最大下界をいう．$\leqq$を$\geqq$にかえて，いわゆる双対的に，上界と上端とが定義される．

順序集合Lの任意の2元 a, b に対し，その下端と上端とがそれぞれ存在す

---

*) 添数集合 Λ から M の中への写像 $\lambda\longrightarrow a_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$.

**) すなわち，上記写像による Λ の像.

るとき，Lを**束**という．下端を $a\cap b$（a, b の**交わり**），上端を $a\cup b$（a, b の**結び**）で表わす．とくに，L の元の任意の族 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，下端 $\cap_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ と上端 $\cup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ とが存在するとき，Lを**完備束**という．

Lが束であって，$c\leqq a$ ならば，任意の元 b につき，

$$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup c$$

なるとき，Lを**モジュラー束**という．

問1 束Lがモジュラー束なるための条件は，任意の $a, b, c\in L$ につき，

$$(a\cap(b\cup c))\cup c=((a\cup c)\cap b)\cup c$$

なることである．

ところで，アーベル群論のおもな対象は無限アーベル群であり，“無限者”への何らかの方法が必要となるが，一番よく使われるのが**ツォルンの補題**である．

順序集合Mの元aがMの**極大元**とは，$a<x$ なる元xがMに存在しないことである．ツォルンの補題の述べ方はいくつもあるが，ここでは次のものをとろう．

ツォルンの補題 順序集合Mにふくまれる任意の全順序集合がMで上端をもつならば，Mに少なくも一つの極大元がある．

C． 最後に，集合論から少々述べる．集合AとA'の間に一対一対応が成り立つとき，AとA'は同じ**濃度**をもつという．自然数全体の集合と同じ濃度をもつ集合が，いわゆる可算無限集合である*⁾．集合Aの濃度を $|A|$ で表わす．二つの集合 A, B に対し，順序づけられた元の組 (a, b) $(a\in A,\ a\in B)$ の全体を，$A\times B$ で表わし，AとBの直積という．このとき，濃度 $|A|$，$|B|$ の積を

$$|A|\cdot|B|=|A\times B|$$

により定義する．無限集合の濃度$\mathfrak{m}$に対し，$\mathfrak{m}^2$（すなわち $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}$）が$\mathfrak{m}$に等しいという定理は，アーベル群論でしばしば用いられる．

集合Aが集合Bのある部分集合と濃度が等しいとき，$|A|\leqq|B|$ として，濃度の順序が定義される．実際，前述の順序の公理（i）と（iii）は簡単にわかるが，公理（ii）の $\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{n}$，$\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{m}$ なら $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ となることは証明を要し，ベルンシュタインの定理といわれる．無限集合の濃度$\mathfrak{m}$に対し，前記 $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}$ を少し

*⁾ 本書では，可算無限集合と有限集合をあわせて，**可算集合**と称する．

拡張して，$0<\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{m}$ ならば $\mathfrak{m}\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$ が成立する．

問 2　群Gが無限集合Sを生成団とするならば，GとSは濃度が等しい．

順序集合Aの任意の空でない部分集合が最小元（下界であって，かつこの部分集合に属するもの）を有するとき，Aを**整列集合**という．二つの整列集合A, A' の間に，順序をたもつ一対一対応が存在するとき，AとA' は同じ**順序数**をもつという．順序数の理論の初歩は既知としよう．たとえば，その大小の順序の定義，順序数αに対し，その直後の順序数 $\alpha+1$ のことなどである．αの直後の順序数は常に存在するが，直前の順序数 $\alpha-1$ は存在するとは限らない．直前の順序数のない順序数を，極限数という．任意の順序数αは，$\alpha=\gamma+n$(γは極限数で，nは有限順序数）の形に，かつ一意的に表わされる．最小の無限順序数は，普通ωで表わされる．

順序数の積を定義するため，A, B をそれぞれ順序数 α, β を有する整列集合とし，直積 $A\times B$ の 2 元 (a_1, b_1), (a_2, b_2) $(a_i\in A,\ b_i\in B;\ i=1, 2)$ の順序を，もし $b_1<b_2$ なら a_i に関せず $(a_1, b_1)<(a_2, b_2)$ とし，$b_1=b_2$ のとき，$a_1<a_2$ なら $(a_1, b_1)<(a_2, b_2)$ として，順序を定義する．（$b_2<b_1$ のときは$<$と$>$をとりかえる．a_i についても同様．）これにより生ずる整列集合の順序数を$\alpha\beta$ と書き，αとβの積と定義する．

問 3　任意の順序数αは，$\alpha=\omega\sigma+n$ (nは有限順序数) の形に，かつ一意的に表わされる．

1・2　群の部分群の束

群Gの二つの部分群 A, B に対し，集合としてAがBにふくまれることを，普通のように $A\subseteq B$ と書けば，$\subseteq$ は順序関係で，G の部分群全部の集合が順序集合となる．

この順序集合は，完備束になっている．すなわち，Gの部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられると，A_λ 全部の共通集合はまた G の部分群で，これが A_λ の交わり $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ である．また，A_λ の和集合 $\vee_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$*) から生成された部分群が，$A_\lambda$ の結び $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を与える．$\vee_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ はその任意の元の逆元もふくむから，$\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ とは，有限個の元の列の和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ $(a_i\in A_{\lambda_i},\ \lambda_i\in\Lambda;\ i=1, 2,$

*) 記号$\vee$は和集合を意味し，$\cup$は部分群の結びを意味することに注意．

$\cdots, k$) の全体にほかならない．したがって，Gの任意の部分群をA，部分群の任意の族を $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ とすれば，

$$A\cap(\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda_1,\cdots,\lambda_k}(A\cap(A_{\lambda_1}\cup\cdots\cup A_{\lambda_k})) \tag{1·1}$$

である．ここに，右辺の $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ は，Λ における任意の有限列で，そういうもの全部にわたらせるのである．とくに，$[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$*) が(前記包含関係につき)全順序集合をなすときは，$\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ はちょうど A_λ 全部の和集合となる．したがって，Gの任意の部分群Aにつき，

$$A\cap(\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\cup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap A_\lambda) \tag{1·2}$$

となる．

定理 1　群の部分群の束はモジュラー束である．

証明　3部分群 A, B, C をとり，$C\subseteq A$ とする．

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$$

をいえばよいが，それには，左辺が右辺にふくまれることだけいえばよい．

$$a=b+c \quad (a\in A,\ b\in B,\ c\in C)$$

を左辺の任意の元とすれば，$C\subseteq A$ により，

$$a-c=b\in A\cap B$$

ゆえに $a\in(A\cap B)\cup C$ となる．　▌

命題 1**)　群Gの部分群 A, B, C につき，$A\cap(B\cup C)=0$，$B\cap C=0$ ならば，$(A\cup B)\cap C=0$ である．

証明　1·1 節の問1において，a, b, c の代わりに A, C, B を代入すると，

$$(A\cap(B\cup C))\cup B=((A\cup B)\cap C)\cup B$$

ゆえに，$A\cap(B\cup C)=0$ なら，

$$B=((A\cup B)\cap C)\cup B$$

よって，$(A\cup B)\cap C\subseteq B$ で，

$$(A\cup B)\cap C\subseteq B\cap C=0$$

すなわち，$(A\cup B)\cap C=0$ が得られる．

しかし直接証明のほうが，実は簡単である．$(A\cup B)\cap C$ から任意に元 $a+$

---

*)　正確にいえば，この族から得られる，Gの部分群のある集合が．

**)　定理というほどではないが，あとで使ったりする関係上，かかげておいたほうがよい事実を，命題 (proposition) とよぶことにする．

$b=c$ ($a\in A$, $b\in B$, $c\in C$) をとれば，$a=(-b)+c\in A\cap(B\cup C)=0$ だから，$a=(-b)+c=0$ で，$B\cap C=0$ により，$b=c=0$ となる． ▌

補説 この命題を証明するには，上記のように，直接証明のほうがずっと簡単である．しかし，この命題が，部分群の束のモジュラー性だけから導かれることを読者が了解しておくことは，理論の筋道を透明にするために，望ましいことなのである．

1・3 本部分群，粋部分群，高部分群

A. 群 G の部分群 A に対し，$A\cap B=0$ なる G の部分群 B は 0 に限るとき，A を G の**本部分群** (essential subgroup) という．すなわち，$B\neq 0$ なる G の部分群 B に対しては，かならず $A\cap B\neq 0$ となるものである．

命題 1 A が群 G の本部分群，B が A の本部分群ならば，B は G の本部分群である．

証明 G の部分群 $C\neq 0$ をとる．A は G の本部分群だから，$A\cap C\neq 0$ が得られる．すると，B は A の本部分群だから，さらに $B\cap(A\cap C)=B\cap C\neq 0$ が得られる．よって B は G の本部分群である． ▌

命題 2 群 G の部分群 A, B, C において，B が A の本部分群で，かつ $B\cap C=0$ ならば，$A\cap C=0$ である．

証明 $A\cap C\neq 0$ とすれば，これは A の部分群だから，B が A の本部分群なることにより，$B\cap(A\cap C)=B\cap C\neq 0$ が得られ，$B\cap C=0$ と矛盾する． ▌

命題 3 群 G の任意の与えられた部分群を A とする．A をふくむ G の部分群 H であって，A が H の本部分群なる如きものの中に，極大なものが存在する．

証明 $[H_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を上の条件を満たす G の部分群 H_λ の（包含関係による）全順序集合とする．$\cup_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$ の部分群 B が $B\cap A=0$ を満たすとすれば，式 (1・2) により，

$$B=B\cap(\cup_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)=\cup_{\lambda\in\Lambda}(B\cap H_\lambda)$$

ゆえに，$(\cup_{\lambda\in\Lambda}(B\cap H_\lambda))\cap A=0$ を得る．$B\cap H_\lambda=B_\lambda$ ($\lambda\in\Lambda$) とおけば，$[B_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$*) も全順序集合で，ふたたび (1・2) を用いて，

$$A\cap B=A\cap(\cup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\cup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)=0$$

ゆえにすべての $\lambda\in\Lambda$ につき，$A\cap B_\lambda=0$ である．A は H_λ で本部分群だから，

*) 正確には，この族から得られる集合．

$B_\lambda=0$ $(\lambda\in\Lambda)$ が得られる．したがって，$B=\cup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=0$ となり，Aが $\cup_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$ の本部分群なることが証明された，すなわち，全順序集合 $[H_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ は上端を有する．するとツォルンの補題により，極大なHの存在が保証される．∎

この命題で述べられた極大な部分群を，Gの部分群Aの，Gにおける一つの**本包** (essential closure) とよぶ．

命題 4 群Gの部分群AのGにおける任意の本包をA'とすれば，A'のGにおける任意の本包はA'に一致する．

証明は，命題1と本包の定義から容易に得られる．

B． 群Gの部分群Nが，Gにおける一つの本包と一致すれば，明らかに，任意の本包とも一致する．そこで，このようなNは，その本包と一致するといい，Gの**粋部分群** (neat subgroup) と称する*)．命題4から直ちに，

命題 5 群Gの任意の部分群の任意の本包は，Gの粋部分群である．

群Gの任意の部分群をAとすれば，ツォルンの補題により，$A\cap B=0$ なるGの部分群Bの中に，極大なものが存在する．(証明には，やはり式 (1·2) を用いればよい．) このような極大な部分群を，Gにおける **A-高部分群** (A-high subgroup) という．

定理 1 群Gの任意の部分群をAとすると，Gにおける任意のA-高部分群Bは，Gの粋部分群である．

証明 B'をBのGにおける任意の本包とすれば，BがB'の本部分群なることと，$B\cap A=0$ なることから，命題2により，$B'\cap A=0$ となる．よってBの極大性から，$B'=B$ でなければならない．∎

定理 2 Aを群Gの与えられた部分群とする．Gの一つの部分群BがGにおけるA-高部分群となるための条件は，$A\cap B=0$ で，BがGの粋部分群であり，かつ $A\cup B$ がGの本部分群なることである．

証明 BがGにおけるA-高部分群とすると，もちろん $A\cap B=0$ であり，また前定理により，BはGの粋部分群である．$A\cup B$ がGの本部分群なることをいうために，$(A\cup B)\cap C=0$ なるGの部分群Cをとると，$A\cap B=0$ により，1·2 節の命題1により，

*) 本包を使わないで，本部分群の概念だけから，粋部分群を定義することもできる．すなわち，群Gの部分群Nに対し，$A\supseteq N$ なるGの部分群AにおいてNが本部分群ならば，$A=N$ なるとき，NはGの粋部分群と定義するのである．

$$A\cap(B\cup C)=0$$

よって，Bの極大性から，$B=B\cup C$ となり，

$$C=B\cap C\subseteq(A\cup B)\cap C=0$$

であるから，$C=0$ が得られる．

逆に，Bが定理の3条件を満たしているとし，$B'\supseteq B$，$B'\cap A=0$ なるGの部分群 B' をとる．G の部分群 B_0 で，$B_0\subseteq B'$，$B_0\cap B=0$ なるものを任意にとると，$B_0\cup B\subseteq B'$ であるから，

$$(B_0\cup B)\cap A=0$$

これと，$B_0\cap B=0$ から，ふたたび1·2節の命題1を用いて，

$$(A\cup B)\cap B_0=0$$

しかるに，$A\cup B$ はGの本部分群だから，$B_0=0$ が得られる．したがって，B は B' の本部分群なることがわかった．一方，BはGの粋部分群であるから，$B=B'$ でなければならない．ゆえにBはGにおける A-高部分群である． ▌

問1[*)] Aを群Gの粋部分群とすれば，Gにおける任意の A-高部分群Bに対し，AはGにおける B-高部分群である．

問2 Aを群 G の粋部分群とし，$A\cap B=0$ なる G の部分群 B をとり，Gにおける $(A\cup B)$-高部分群Cをとると，Aは G における $(B\cup C)$-高部分群である．

1・4 直　和　分　解

A. 群Gの部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が**独立** (independent) であるとは，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し，

$$A_\lambda\cap(\cup_{\lambda'\neq\lambda,\lambda'\in\Lambda}A_{\lambda'})=0$$

なることをいう．

命題 1 群Gの部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であるための条件は，Λの任意有限部分集合 Λ' に対し，族 $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda'}$ が独立なることである．

証明 必要性は明らかである．十分性のほうも，式 (1·1) から容易に得られる． ▌

命題 2 群Gの部分群の有限列 $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$ が独立なるための条件は，任意の $k(1\leqq k<n)$ につき，

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)\cap A_{k+1}=0$$

*) 問1は問2の特別な場合であるが，練習上，読者はまず問1をこころみられたい．

なることである.

証明 必要性は明らかである. 十分性をいうために, 上の条件が成立するとし, また, n に関する帰納法を用いるため, $[A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}]$ の独立性は既に証明されたものとする. 上式で $k=n-1$ とおけば,

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n = 0$$

であるから, $i<n$ につき, $B=A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1} \cap A_{i+1} \cup \cdots \cup A_{n-1}$ とおけば,

$$(A_i \cup B) \cap A_n = 0$$

また, 帰納法の仮定により, $A_i \cap B=0$ である. よって1·2節の命題1により,

$$A_i \cap (B \cup A_n) = 0$$

すなわち,

$$A_i \cap (\cup_{j \neq i, 1 \leqq j \leqq n} A_j) = 0$$

となって, ($i=n$ では既にいえているから) 証明が終わる. ▌

命題 3 A, A' は群 G の部分群で, A を A' の本部分群とする. もし G の部分群の有限列 $[A, A_1, \cdots, A_k]$ が独立ならば, $[A', A_1, \cdots, A_k]$ も独立である.

証明 仮定により $[A_1, \cdots, A_k]$ は独立だから, 命題2により,

$$A' \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = 0$$

を証明すればよい. $B=A_1 \cup \cdots \cup A_k$ とおけば, 仮定により $A \cap B=0$ で, かつ A が A' の本部分群だから, 1·3節の命題2により, $A' \cap B=0$ となる. ▌

命題 4 $[A_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, $[A_\lambda']_{\lambda \in \Lambda}$ をともに群 G の部分群の族で, 各 $\lambda \in \Lambda$ につき, A_λ が A_λ' の本部分群とする. もし $[A_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ が独立ならば, $[A_\lambda']_{\lambda \in \Lambda}$ も独立である.

証明 命題1により, Λ が有限集合で, たとえば $\Lambda=[1, 2, \cdots, n]$ のときに証明すればよい. 命題3を用いると, まず $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$ の独立性から, $[A_1', A_2, \cdots, A_n]$ の独立性が得られ, それからさらに $[A_1', A_2', A_3, \cdots, A_n]$ の独立性が得られ, 以下同様にして, $[A_1', A_2', \cdots, A_n']$ の独立性が得られる. ▌

B. 群 G の元の族 $[a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ において, Λ のある有限部分集合 $\Lambda'=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k]$ をとれば, Λ' に属さないすべての $\lambda \in \Lambda$ につき $a_\lambda=0$ なるとき, a_λ 全体の和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ を $\sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda = a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_k}$ により定義する. これは, Λ' のとり方に無関係に, 一意的に定まる. 今後, G の元の無限族の和を考える場合は, 常にこのような和のみをとることにする.

群 G の部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，結び $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ とは，上記の意味で $\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ ($a_\lambda\in A_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$) の形に表わされる G の元全体にほかならない．そして，もし $[A_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立なら，表示は一意的，すなわち，各 λ につき a_λ が一意的に定まり，逆も成り立つ．

群 G の部分群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立で，かつ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda=G$ なるとき，G を $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) といい，G の中にこのような部分群の族をとる操作を，G の**直和分解** (direct sum decomposition) という．記号で，$G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ と表わす．とくに有限集合 $\Lambda=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k]$ の場合は，$G=G_{\lambda_1}+G_{\lambda_2}+\cdots+G_{\lambda_k}$*) と表わす．$G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ なるとき，G の任意の元 g は，$g=\sum_{\lambda\in\Lambda}g_\lambda$ ($g_\lambda\in G_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$) の形に一意的に表わされ，逆も成り立つ．

今，$G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ で，各 $\lambda\in\Lambda$ につき，$G_\lambda=\sum_{\mu\in M_\lambda}H_\mu$ とする．ここに，添数集合 M_λ は，たがいに素，すなわち，$\lambda\neq\lambda'$ なら M_λ と $M_{\lambda'}$ は共通元を有さないようにとっておくことにする．すると，これら M_λ 全部の和集合 M に対し，$G=\sum_{\mu\in M}H_\mu$ となる．逆に，$G=\sum_{\mu\in M}H_\mu$ で，M の一つの類別を $[M_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ とすれば，各 $\lambda\in\Lambda$ につき $\bigcup_{\mu\in M_\lambda}H_\mu=G_\lambda$ とおくとき $G_\lambda=\sum_{\mu\in M_\lambda}H_\mu$ で，かつ $G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ である．

群 G の二つの直和分解 $G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda=\sum_{\lambda'\in\Lambda'}G_{\lambda'}'$ において，適当な対応で Λ と Λ' が一対一に対応し，かつこの対応で対応するすべての $\lambda\in\Lambda$ と $\lambda'\in\Lambda'$ の組に対し，G_λ と $G_{\lambda'}'$ が同型となるとき，この二つの直和分解は**同型**であるという．

群 G の一つの直和分解 $G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ に現われる各 G_λ を，G の**直和因子** (direct summand) という．$\sum_{\lambda'\neq\lambda,\ \lambda'\in\Lambda}G_{\lambda'}=H_\lambda$ とおけば，$G=G_\lambda+H_\lambda$ となるから，群 G の直和因子とは，$G=A+B$ なる G の部分群 B が存在するような G の部分群 A をいうわけである．

以下，二つの部分群への直和分解について記そう．

命題 5　$G=A+B$, $B'\supseteq B$ ならば，

$$B'=(A\cap B')+B$$

証明　まず $A\cap B=0$ から，

$$(A\cap B')\cap B=0$$

---

*) 著者によっては，$+$ を $\oplus$ と書く人もいる．

そして，$B'\supseteq B$ とモジュラー律から，

$$(A\cap B')\cup B=B\cup(A\cap B')$$
$$=(B\cup A)\cap B'$$
$$=G\cap B'$$
$$=B'$$

よって $B'=(A\cap B')+B$ となる． ▮

問1 $G=A+B=A'+B'$ で，$A\subseteq A'$，$B\subseteq B'$ ならば，$A=A'$，$B=B'$ である．

問2 群 G の直和因子は，G の粋部分群である．

C. A を群 G の部分群とする．G における任意の A-高部分群 B に対し，$G=A+B$ となるとき，A を G の**絶対直和因子** (absolute direct summand) という．

問3 A が群 G の絶対直和因子となる条件は，$A\cap C=0$ なる任意の G の部分群 C に対し，$G=A+B(B\supseteq C)$ なる直和分解ができることである．

命題 6 A を群 G の部分群とする．$A\cap N=0$ なる任意の G の粋部分群 N に対し，$A\cup N$ も G の粋部分群ならば，A は G の絶対直和因子である．

証明 仮定が満たされているとし，G における任意の A-高部分群 B をとる．1·3 節の定理1により，B は G の粋部分群で，もちろん $A\cap B=0$ だから，仮定により $A\cup B$ は G の粋部分群である．一方，1·3 節の定理2により，$A\cup B$ は G の本部分群である．よって，$A\cup B=G$ でなければならない． ▮

D. これまで，与えられた群 G の，部分群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ への直和分解を考察してきた．これに対し，群の与えられた族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ からその直和を作る操作を述べよう．

群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとし，各 $\lambda\in\Lambda$ につき G_λ から任意に元 g_λ をとって，元の族 $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ をつくる．これら全体の集合を G とし，

$$[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}+[g'_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}=[g_\lambda+g'_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$$

により和を定義すれば，明らかに G は群をなす．これを，群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の**非制限直和** (unrestricted direct sum) といい[*]，記号 $G=\sum^*_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ で表わす．G の元の中で，一定の $\lambda_0\in\Lambda$ につき，λ_0 以外のすべての $\lambda'\in\Lambda$ については $g_{\lambda'}=0$ となる族 $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の全体は，G_{λ_0} と同型な部分群 G'_{λ_0} をなす．$\cup_{\lambda\in\Lambda}$

[*] 完全直和 (complete direct sum) ともいう．

$G'_\lambda=G'$ を，群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の**制限直和** (restricted direct sum) という．それは，有限個の $\lambda\in\Lambda$ を除けば $g_\lambda=0$ となるような族 $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の全体である．G' は前に述べた意味で部分群の族 $[G'_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の直和である．逆に，群 G がその部分群の族 $[G_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の直和ならば，この族を群の族と見て，その制限直和をつくると，G と同型な群が得られる．

第2章　有限的操作

第1章では，群 G の元 g の整数倍 ng という概念を全く用いないで，アーベル群論への一つの introduction を述べたのであった．本章ではじめて，群の元の整数倍をとる操作を導入する．そしてアーベル群論は，この操作により，にわかに多彩で豊かなものとなるのである．しかし本章でも，本部分群や粋部分群の概念をできるだけ活用し，なるべく systematic な形で理論を展開して行こう．2·1 節では，上記整数倍という操作に関連した基礎的諸性質を述べ，2·2 節では，この操作により本部分群と粋部分群の具体的な特徴づけを行なう．2·3 節では極大独立集合と本部分群との関係をしるす．2·4 節では自由群および生成団と基本関係について述べる．2·5 節では可除群と可除包の理論を，やはり本部分群や粋部分群を基礎にして述べる．2·6 節では，やや特殊な概念ではあるが，最近ウォーカー [15] により興味深く活用された n–拡大の概念について述べ，2·7 節では階数に関する諸定理を述べる．最後の 2·8 節のテーマは，プリューファー以来の重要概念である純粋部分群で，“純粋有界部分群は直和因子である”という有用な定理が証明される．

2·1　整数倍という操作

群 G の元 g と任意の自然数 n に対し，n 個の g の和として，ng が定義される．整数 0 に対しては，$0g=0$（Gの零元）と定義し，負の整数mに対しては，$mg=-(-m)g$ により mg を定義する．すると，任意の整数 m と G の任意の2元 g, h に対し，

$$m(g+h)=mg+mh$$

すなわち，m倍するという操作は，Gの自己準同型写像（GからGの中への準同型写像）を与える．また，任意2整数 m, n とGの任意の元 g に対し，

$$(m+n)g=mg+ng$$

$$(mn)g=m(ng)$$

$$1g=g$$

である．したがって，Gは整数全体の環Zに対し，Z–加群と見ることができ，Gの任意の部分群Aは，Z–認容的である．すなわち，任意の $m\in Z$, $a\in A$ に

対し，$ma \in A$ である．

G の部分群 A と整数 m に対し，ma ($a \in A$) の全体は G の部分群をなし，記号 mA で表わされる*)．上述により $mA \subseteq A$ である．また，$mg \in A$ なる G の元 g の全体は，G の部分群をなし，記号 $m^{-1}A$ で表わされる．もちろん $m^{-1}A \supseteq A$ である．これを，G の中で考えていることを明示するため，時には $m_G{}^{-1}A$ で表わす．なお，$m = p^e$（p は素数**)）のときは，$(p^e)^{-1}A$ の代わりに，$p^{-e}A$ と記すことにする．

問 1 群 G の部分群 A と任意 2 整数 m, n につき，

$$m(nA) = (mn)A, \quad m^{-1}(n^{-1}A) = (mn)^{-1}A$$

問 2 群 G の部分群 A と整数 m につき，

$$m(m^{-1}A) = A \cap mG, \quad m^{-1}(mA) = A \cup m^{-1}0$$

問 3 群 G の部分群 A, B と整数 m, n につき，

$$m(A \cap (mn)^{-1}B) = mA \cap n^{-1}B$$

次の 3 命題の証明は全く容易である．

命題 1 群 G の部分群 A と整数 m に対し，

$$m(G/A) = (mG \cup A)/A$$

命題 2 $G = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ であれば，整数 m につき，

$$mG = \sum_{\lambda \in \Lambda} mG_\lambda, \quad mG_\lambda = G_\lambda \cap mG \quad (\lambda \in \Lambda),$$

$$m_G{}^{-1}0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{G_\lambda}{}^{-1}0, \quad m_{G_\lambda}{}^{-1}0 = G_\lambda \cap m_G{}^{-1}0 \quad (\lambda \in \Lambda)$$

命題 3 m と n が互いに素な整数であれば，任意の群 G において，

$$m_G{}^{-1}0 \subseteq nG$$

問 4 m と n が互いに素な整数であれば，群 G の部分群 A に対し，

$$mnA = mA \cap nA$$

$$(mn)^{-1}A = m^{-1}A \cup n^{-1}A, \quad A = m^{-1}A \cap n^{-1}A$$

群 G の元 g に対し，$ng = 0$ なる自然数 n が存在するとき，g は**有限位数**の元といい，そのような自然数中の最小数を，g の**位数**（order）という．記号 $O(g)$ で表わされる．周知のように，g の位数 m は $ng = 0$ なる n の約数となる．

問 5 有限位数の元 g と任意の整数 m に対し，

$$O(mg) = O(g)/(m, O(g))$$

とくに，元 g の位数が p^e（p は素数）の形のとき，e を g の**指数**（exponent）

*) A が部分群でなく，単に G の部分集合のときも，記号 mA が同様に定義される．

**) 素数ということばを，本書では正の素数の意味にのみ使用する．

といって，記号 $E(g)$ で表わす．

前記のような $ng=0$ なる自然数 n が存在しないとき，g は**無限位数**の元とも，また位数0の元ともいい，記号 $O(g)=0$ で表わす．

群Gのすべての元が有限位数のとき，Gを**ねじれ群** (torsion group) という．G の0以外の元がみな無限位数のとき，G を**ねじれのない群** (torsion free group) という．また，この二者のいずれでもない，すなわち，無限位数の元も，また0以外の有限位数の元も，ともに存在する群を，**混合群** (mixed group) という．

任意の群Gにおいて，ねじれ群であるような部分群中最大のものが存在する．すなわち，Gの有限位数の元全体のなす部分群で，記号 G_t で表わす．これをGの**最大ねじれ部分群** (maximal torsion subgroup) という．

命題 4 群Gの最大ねじれ部分群 G_t に対し，G/G_t はねじれのない群である．

これも証明は容易である．

pを一定の素数とし，群Gのすべての元の位数がpのベキであるとき，Gを**p-群**または**準素群** (primary group) という．任意の群Gにおいて，位数がpのベキなる元全体は，部分群 G_p をなし，G の **p-準素成分** (p-primary component) という．

次の定理も容易に証明される．

定理 1 任意のねじれ群Gは，

$$G=\sum_p G_p$$

と直和分解される．ここにpはすべての素数にわたるものとする．また，Gの任意の部分群Aに対し，

$$A=\sum_p (A\cap G_p)$$

したがって，ねじれ群の理論は，p-群の理論に帰着される．たとえば，Gの部分群AがGの本部分群なるための条件は，すべての素数pにつき，A_p が G_p の本部分群なることである．また，$G\cong H$ なるための条件は，すべての素数pにつき，$G_p\cong H_p$ なることである．

Gを p-群とするとき，$p_G^{-1}0$ をGの**台部分群** (socle) という．Gの0ならざる部分群は，かならず位数pの元をふくむから，次の命題が成り立つ．

命題 5　p-群Gの台部分群は，Gの本部分群である．

命題 6　p-群Gの台部分群Pが無限群ならば，$|G|=|P|$ である．

証明　$|P|=\mathfrak{p}$ とおく．自然数 n に対し，$|p^{-n}0|=\mathfrak{p}$ がいえたとすると，$p^{-(n+1)}0$ の任意の元 g に，$p^{-n}0$ の元 pg を対応させれば，$p^{-n}0$ の一つの元に，$p^{-(n+1)}0$ の元が高々 $|P|=\mathfrak{p}$ 個対応するから，$|p^{-(n+1)}0|\leqq\mathfrak{p}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ で，$|p^{-(n+1)}0|=\mathfrak{p}$ が得られる．よって，すべての自然数nにつき $|p^{-n}0|=\mathfrak{p}$ である．したがって，各自然数nにつき $p^{-(n+1)}0-p^{-n}0$*) の濃度は $\mathfrak{p}$ をこえず，これらをすべての n につき加えて，$|G|\leqq\aleph_0\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ で，$|G|=\mathfrak{p}$ が得られる．▌

高度 (height) という概念は，ねじれのない群においても重要であるが，ここでは p-群についてだけ定義しよう．

p-群Gの元 g に対し，$g\in p^hG$, $g\notin p^{h+1}G$ なる負でない整数 h が存在するとき，g を有限高度 h の元といい，$H(g)=h$ で表わす．このような h が存在しないとき，g は無限高度の元といい，$H(g)=\infty$ で表わす．記号∞は如何なる整数よりも大と規約すると，次の命題が成り立つ．

命題 7　p-群Gの任意の2元 x, y につき，

(i)　$H(x)<H(y)$ ならば $H(x+y)=H(x)$.

(ii)　$H(x)=H(y)$ ならば $H(x+y)\geqq H(x)$.

(iii)　$H(x)\neq\infty$ ならば $H(px)>H(x)$.

次の命題も容易に検証される．

命題 8　p-群 G が $G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ と直和分解されるとき，G の元 g が $g=\sum_{\lambda\in\Lambda}g_\lambda$ $(g_\lambda\in G_\lambda, \lambda\in\Lambda)$ と表わされたとすると，$H(g)=\min$**)$[H(g_\lambda), \lambda\in\Lambda]$ である．

2・2　本部分群と粋部分群 再説

第1章で述べた本部分群と粋部分群の2概念は，群の元の整数倍という操作によって，より具体的に特徴づけることができる．

群 G が部分集合Sを生成団としてもてば，G の任意の元gは $\sum x_s s$ の形に表わされる．ここに，x_s は整数で，s は S のすべての元にわたり，有限個の

*)　$p^{-(n+1)}0$ にふくまれ，$p^{-n}0$にふくまれない元全体の集合．

**)　min はもちろん最小数の記号である．

sを除き $x_s s=0$ である．gをSの元の**1次結合**という．とくに，Sが唯一つの元sからなるとき，すなわち $G=\{s\}$ なるとき，Gを**巡回群**という．一般の群の，巡回群なる如き部分群を，巡回部分群という．

命題 1　群Gの部分群AがGの本部分群なるための条件は，Gの任意の0ならざる元gに対し，適当な整数mをとれば，mg がAの0ならざる元になることである．

証明　AがGの本部分群なるための条件は，Gの任意の0ならざる巡回部分群 $\{g\}$ に対し，$A\cap\{g\}\neq 0$ なることだからである．▮

定理 1　群Gの部分群AがGの本部分群なるための条件は，G/A がねじれ群で，かつすべての素数pにつき

$$p_G{}^{-1}0\subseteq A$$

なることである．

証明　AがGの本部分群ならば，命題1により，G/A はねじれ群である．また，素数位数pの元gに対し，$A\cap\{g\}\neq 0$ となるから，$A\cap\{g\}=\{g\}$ で，$g\in A$ となる．逆に，この2条件が満たされたとする．Gの任意の元 $g\neq 0$ に対し，適当な自然数mをとると，mg がAの0ならざる元になることをいえばよい．仮定から G/A はねじれ群で，$m'g\in A$ なる自然数 m' は確かに存在する．$m'g\neq 0$ なら，$m=m'$ とすればよいから，$m'g=0$ なるものとしよう．gは有限位数だから，位数をnとすると，$g\neq 0$ により $n>1$ で，$n=p_1\cdots p_r$（p_iは素数）とすれば，$p_1p_2\cdots p_rg=0$，$p_2\cdots p_r g\neq 0$ である．よって $m=p_2\cdots p_r$ とおけば，$mg\neq 0$ で，かつ $mg\in p_1{}^{-1}0\subseteq A$ となる．▮

命題 2　有限巡回群Gの部分群AがGの本部分群なるための条件は，$|G|$ を割る任意の素数が $|A|$ を割ることである．

証明　AをGの本部分群とし，$|G|$ を割る任意の素数をpとする．Gには位数pの元gがあり*)，定理1により $g\in A$ だから，$|A|$ はpで割れる．逆に，$|G|$ を割る任意の素数が $|A|$ を割るとき，AはGの本部分群となる．実際Gの素数位数pの元gをとり，$g\notin A$ とすれば，$\{g\}\cap A=0$，一方pは $|G|$ を割るから $|A|$ を割り，Aに位数pの元 g' が存在する．$\{g\}\cap\{g'\}=0$ だから，

---

*)（かならずしも可換でない）有限群Gの位数が素数pで割れれば，Gに位数pの元が存在する．しかし，有限巡回群の場合，前節問5を用いるとよい．

$\{g\}\cup\{g'\}=\{g\}+\{g'\}$ で，二つの位数 p の巡回群の直和だから，巡回群ではない．したがってGも巡回群ではなくなり，仮定に反するのである． ▌

命題 3 p-群 G において，その粋部分群 A が $p_A{}^{-1}0=p_G{}^{-1}0$ を満足するならば，$A=G$ である．

証明 定理1により，A は G の本部分群である．かつ A は G の粋部分群でもあるから，$A=G$ である． ▌

定理 2 群 G の部分群 A が G の粋部分群なるための条件は，任意の素数 p に対し，

$$pA=A\cap pG \tag{2·1}$$

なることである．

証明 A が G の粋部分群とする．任意の素数 p に対し，$A\cap pG\ni a=pg$ ($g\in G$) とし，$a\in pA$ を示せば，(2·1) がいえたことになる．$a\notin pA$ と仮定すれば，$g\notin A$ であるから，$\{A, g\}=A'\supset A$ である．よって A が A' の本部分群なることを示せば，A は G の粋部分群だから，定義に反することになる．A'/A は位数 p の巡回群だから，ねじれ群で，かつ p と異なる素数 q については，A' の位数 q の元は A にふくまれることがわかる．次に，$a'\in A'$ を位数 p の元としよう．$a'\notin A$ とすると，

$$a'=a_0+xg \quad (a_0\in A, 0<x<p)$$

と表わされる．$pa'=0$ により，$pa_0=-pxg=-xa$ で，$(p, x)=1$ だから，$mp+nx=1$ なる整数 m, n をとると，$npa_0=-nxa=(mp-1)a$ となり，

$$a=p(ma-na_0)\in pA$$

で $a\notin pA$ に反する．かくて，定理1により A は A' の本部分群で，(2·1) が証されたことになる．

逆に，任意の素数 p に対し，(2·1) が成立するとする．A の G における本包 A' が A と異なると仮定しよう．A'/A は定理1によりねじれ群だから，ある素数位数 p の元をもち，したがって，A' には $pa'=a\in A$, $a'\notin A$ なる元 a' がある．(2·1) により，

$$pa'=a\in A\cap pG=pA$$

で，$pa'=pa_0$ ($a_0\in A$) と表わされるが，$p(a'-a_0)=0$ であるから，定理1により $a'-a_0\in A$ で，$a'\in A$ となる．これは $a'\notin A$ に反する．よって $A'=A$

で，AはGの粋部分群である． ▮

命題 4 AがGの粋部分群，BがAの粋部分群ならば，BはGの粋部分群である．

証明 任意の素数 p に対し，$pB=B\cap pA$ と，$pA=A\cap pG$ から，$pB=B\cap(A\cap pG)$ となり，$pB=B\cap pG$ が得られる． ▮

問 1 群 G の粋部分群の族 $[N_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が（包含関係の順序で）全順序集合ならば，その結び $\cup_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda$ も G の粋部分群である．

定理 3 群Gの部分群AがGの絶対直和因子となるための条件は，$A\cap N=0$ なる任意のGの粋部分群Nに対し，$A\cup N$もGの粋部分群となることである．

証明 1·4 節の命題6により，十分条件はすでにいえているから，必要条件のほうをいえばよい．AがGの絶対直和因子とし，Nを $A\cap N=0$ なるGの粋部分群とすると，$G=A+B(B\supseteq N)$ なるGの直和分解が存在する．任意の素数pに対し，

$$pg=a+n\ (g\in G,\ a\in A,\ n\in N)$$

とすると，$g=a'+b\ (a'\in A,\ b\in B)$ と表わすとき，

$$pa'+pb=a+n$$

で，$B\supseteq N$ により，$pa'=a,\ pb=n$ が得られる．NはGの粋部分群だから，$n=pn'\ (n'\in N)$ と表わされ，

$$pg=p(a'+n')\ (a'+n'\in A\cup N)$$

となる．すなわち，$A\cup N$ はGの粋部分群である． ▮

2·3 極大独立集合

群 G の元の族 $[s_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が**独立**であるとは，それが 0 をふくまず，また $\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda s_\lambda=0$ （x_λ は整数）ならば，すべての $\lambda\in\Lambda$ につき $x_\lambda s_\lambda=0$ なることである．（部分群の独立の定義では，0 もふくめておいたが，元の族の独立の定義では，0 をふくめないほうが都合がよい．）

次の命題1の証明は容易である．

命題 1 群 G の元の族 $[s_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立ならば，s_λ から生成された巡回部分群の族 $[\{s_\lambda\}]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立である．逆に，$[\{s_\lambda\}]_{\lambda\in\Lambda}$ が 0 をふくまず，かつ独立ならば，$[s_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ は独立である．

命題 2 p-群 G の元の族 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立で，各 $\lambda\in\Lambda$ につき $p^{e_\lambda}b_\lambda=a_\lambda$ ($b_\lambda\in G$) とすれば，元の族 $[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ は独立である．逆に，$[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立で，各 $\lambda\in\Lambda$ につき $p^{e_\lambda}b_\lambda=a_\lambda\neq 0$ ならば，$[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ は独立である．

証明 巡回 p-群 $\{b_\lambda\}$ において，部分群 $\{a_\lambda\}\neq 0$ は本部分群である．ゆえに前半は，命題1と1·4節の命題4から得られる．後半は，命題1と，$[\{b_\lambda\}]_{\lambda\in\Lambda}$ が独立なら，$\{a_\lambda\}\subseteq\{b_\lambda\}$ により，$[\{a_\lambda\}]_{\lambda\in\Lambda}$ の独立性が導かれることから得られる． ▌

群 G の部分集合 S についても，同様に独立が定義される．(空集合は常に独立とする.) G の独立な部分集合の全体は，包含関係の順序で，ツォルンの補題の仮定を満たしている．したがって，極大なものが存在する．これを，G の**極大独立集合**という．

命題 3 群 G の極大独立集合 S から生成された部分群 $\{S\}$ は，G の本部分群である．逆に，独立部分集合 S に対し，$\{S\}$ が G の本部分群ならば，S は G の極大独立集合である．

証明 前半を示すため，$\{S\}$ が G の本部分群でないとする．すると $\{S\}\cap\{a\}=0$ なる G の元 $a\neq 0$ がとれ，a を S に加えて，やはり独立な集合が得られるから，S の極大性に反する．逆に，S が独立で，$\{S\}$ が G の本部分群とすると，2·2 節の命題1により，G の任意の元 $a\neq 0$ に対し，適当な整数 m をとると，ma が0ならざる $\{S\}$ の元となり，これを $\sum_{s\in S}x_s s$ の形に表わすことにより，S に a を加えた集合が独立でないことがわかる．すなわち，S は G の極大独立集合である． ▌

問 1 A が群 G の本部分群ならば，A の任意の極大独立集合は，G でも極大独立集合である．逆に，A のある極大独立集合が，G でもそうであるならば，A は G の本部分群である．

群 G の部分集合 S が独立であって，かつ G の生成団であるとき，G の**基** (basis) であるという．このとき，G の任意の元は，$\sum_{s\in S}x_s s$ (x_s は整数) の形に，かつ一意的に表わされる*)．基はもちろん極大独立集合である．群 G が基を有するための条件は，G が巡回群の直和なることである．

p-群 G が初等 p-群であるとは，0以外のすべての元が位数 p なることであ

*) 一意性の意味は，各 $s\in S$ に対し，$x_s s$ が一意的にきまる意で，x_s は一意的とは限らない．s の位数を法としてなら一意的となる．

る．一般の p-群Gの台部分群 $p_G{}^{-1}0$ は初等 p-群である．

命題 4 初等 p-群Gの任意の極大独立集合は，Gの基である．したがって，Gは位数 p の巡回群の直和である．

証明 Gの極大独立集合をSとし，$G \neq \{S\}$ とすると，$\{S\}$ はGの本部分群だから，$g \in G, g \notin \{S\}$ なるgをとると，$\{S\} \cap \{g\} \neq 0$ である．しかるに，g は素数位数だから，$\{S\} \cap \{g\} = \{g\}$ でなければならず，$g \in \{S\}$ となって仮定に反する． ▮

命題 5 初等 p-群Gの任意の部分群は，Gの絶対直和因子である．

証明 Gは p-群だから，その部分群AがGの粋部分群なるための条件は，

$$pA = A \cap pG$$

なることであるが，$pG = pA = 0$ であるから，これは確かに成立する．したがって，すべての部分群が粋部分群となり，1·4 節の命題6 により，すべての部分群が絶対直和因子である． ▮

命題 6 初等 p-群Gの基Sの濃度は，Gから一意的に定まる．

証明 Sが無限集合なら，S が G の生成団なることから，$|G| = |S|$ で，確かにGから一意的に定まる．また，Sが有限集合で，元の個数が k とすると，Gは位数 p の k 個の巡回群の直和だから，$|G| = p^k$ で，やはり k はGから一意的に定まる． ▮

2·4 自 由 群

無限巡回群の直和となる群を，**自由群**という．

命題 1 群 G の部分群Aに対し，G/A が自由群ならば，AはGの直和因子である．

証明 $[b_\lambda^*]_{\lambda \in \Lambda}$ を G/A の基とし，各 $\lambda \in \Lambda$ につき，$b_\lambda \in b_\lambda^*$ をとる．G の任意の元は，G/A では $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda b_\lambda^*$ の形に表わされるから，G では $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda b_\lambda + a$ $(a \in A)$ の形に表わされる．また，$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda b_\lambda = a \in A$ とすると，$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda b_\lambda^* = 0^*$ だから，すべての $\lambda \in \Lambda$ につき $x_\lambda = 0$ で，$a = 0$ となる．よって，$[b_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ から生成された部分群をBとすれば，GはBとAの直和となる． ▮

定理 1 自由群の部分群は自由群である．

証明 自由群Gの基を $[a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ とし，添数集合 Λ を整列させる．したがっ

て，簡単のため，Λ はある順序数 τ より小さい順序数の全体としよう．任意の順序数 $\alpha\leqq\tau$ に対し，$G_\alpha=\sum_{\lambda<\alpha}\{a_\lambda\}$ とおく．さて G の任意の部分群を H とし，$H_\alpha=H\cap G_\alpha$ とおけば，$H_\alpha\subseteq H_{\alpha+1}$, $H_\alpha=H_{\alpha+1}\cap G_\alpha$ で，同型定理により，

$$H_{\alpha+1}/H_\alpha\cong(H_{\alpha+1}\cup G_\alpha)/G_\alpha \quad (\text{ただし } \alpha<\tau)$$

であるが，右辺は $G_{\alpha+1}/G_\alpha\cong\{a_\alpha\}$ のある部分群と同型である．したがって，$H_{\alpha+1}=H_\alpha$ であるか，または $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ は無限巡回群で，命題1により H_α は $H_{\alpha+1}$ の直和因子となり，$H_{\alpha+1}=H_\alpha+\{b_\alpha\}$ の形となる．よって，b_α の全体（$H_{\alpha+1}=H_\alpha$ なる α については b_α はとらない）が H の基となり，H は自由群となる． ▌

任意の群 G の一つの生成団を $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ とする．これに対し，同じ Λ を添数集合とする基 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を有する自由群 F を作る．写像

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda a_\lambda\to\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda g_\lambda$$

により，F から G の上への準同型写像が得られるが，その核を K とすると，

$$F/K\cong G$$

であり，したがって，群 G は自由群 F とその部分群 K により決定される．さらに，K はその一つの生成団 $[f_\mu]_{\mu\in M}$ により決定されるから，G は $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ と $[f_\mu]_{\mu\in M}$ により決定される．各 f_μ を $f_\mu=\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}a_\lambda$ と表わしたとき，各 a_λ を g_λ でおきかえて得られる方程式の族 $[\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}g_\lambda=0]_{\mu\in M}$ を，$[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を生成団としたときの群 G の（一つの）**基本関係**という．任意の群は，生成団と基本関係により与えられる．

定理 2　群 G が生成団 $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ と基本関係 $[\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}g_\lambda=0]_{\mu\in M}$ で与えられ，また群 H は同じ添数集合 Λ をもつ生成団 $[h_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を有するとする．すべての $\mu\in M$ につき，$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}h_\lambda=0$ ならば，G から H の上への準同型写像であって，すべての $\lambda\in\Lambda$ につき，g_λ を h_λ に写すようなものが存在する．

証明　前と同様，$[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を基とする自由群 F と，写像

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda a_\lambda\to\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda g_\lambda$$

をとり，その核 K の生成団 $[f_\mu]_{\mu\in M}$ から，$f_\mu=\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}a_\lambda$ として，G の基本関係 $[\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{\mu\lambda}g_\lambda=0]_{\mu\in M}$ が得られるものとする．今，$\sum_{\lambda\in\Lambda}y_\lambda g_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda}z_\lambda g_\lambda$ とすると，$\sum_{\lambda\in\Lambda}(y_\lambda-z_\lambda)a_\lambda$ は K にふくまれ，したがって f_μ の1次結合で表わされるから，a_λ を g_λ でとりかえると，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(y_\lambda - z_\lambda)g_\lambda = \sum_{\mu\in M} w_\mu \sum_{\lambda\in\Lambda} x_{\mu\lambda} g_\lambda$$

の形となる．この式で，g_λ を h_λ にとりかえ，定理の仮定を用いれば，右辺は0となる．ゆえに $\sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda h_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda h_\lambda$ となるから，GからHの上への写像を

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda g_\lambda \to \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda h_\lambda$$

によって確かに定義することができ，求める準同型写像となる．　▌

実例として，プリューファーの群をとりあげよう．一つの素数 p に対し，可算無限個の元 $g_1, g_2, g_3, \cdots$ よりなる生成団と，基本関係

$$pg_1=0,\ g_1-pg_2=0,\ g_2-pg_3=0,\ \cdots \tag{2·2}$$

により定義される群Gを，**プリューファーの群**，または**準巡回群** (quasicyclic group) といい，これと同型な群を $C(p^\infty)$ で表わす．この群において，たとえば元 g_1 はちょうど位数 p なのであるが，それは自明ではない*)．きちんと証明するには，次のようにするのである．

分母が p のベキのみよりなる有理数全体の加法群を R_p とし，整数全体の加法群 Z により，剰余群 R_p/Z を考える．$1/p$, $1/p^2$, $1/p^3, \cdots$ の属する mod Z の剰余類をそれぞれ $h_1, h_2, h_3, \cdots$ とすると，$H=R_p/Z$ はこれらを生成団としている．さらに，群Hにおいて，

$$ph_1=0,\ \ h_1-ph_2=0,\ \ h_2-ph_3=0, \cdots$$

がすべて成り立つ．よって，定理2により，すべての $i=1, 2, \cdots$ につき g_i を h_i に写す，GからHの上への準同型写像が存在する．Hにおいて，h_1 は確かに位数 p だから，原像 g_1 の位数は p の倍数である．しかし一方，$pg_1=0$ だから，g_1 の位数はちょうど p でなければならない．同様に，各 g_i の位数は p^i である．逆に，G の位数 p^i の部分群は $\{g_i\}$ だけであり，とくに $\{g_1\}$ がG の台部分群になること，G は p-群であって，かつ $pG=G$ を満足するから，次節で述べる可除群になること，などが容易に示される．任意の元 $g\neq 0$ は，ある自然数 i に対し，xg_i $(0<x<p^i$ かつ $p\nmid x)$ の形に一意的に表わされる．一意性の意味は，g から i と x が一意的にきまる意味である．

もう一つの実例として，有理数の加法群Rを，生成団と基本関係によって定義しよう．生成団 g_1, g_2, $g_3, \cdots$と基本関係

$$g_m - ng_{mn} = 0 \quad (m,\ n \text{ は任意自然数})$$

---

*) (2·2) から $g_1=0$ が導かれるかも知れないのである．

により定義される群を G とする．各 g_n $(n=1,2,\cdots)$ に R の元 $h_n=1/n$ を対応させると，任意自然数 m,n につき $h_m-nh_{mn}=0$ である．よって定理2により，g_n を h_n に写すような，G から R の上への準同型写像が存在する．その核を K とする．K の任意の元

$$g=x_{m_1}g_{m_1}+\cdots+x_{m_t}g_{m_t}$$

をとると，

$$x_{m_1}\frac{1}{m_1}+\cdots+x_{m_t}\frac{1}{m_t}=0$$

だから，

$$x_{m_1}m_2\cdots m_t+\cdots+x_{m_t}m_1\cdots m_{t-1}=0$$

ゆえに，$m_1\cdots m_t=n$ とおけば，基本関係により

$$g=x_{m_1}m_2\cdots m_t g_n+\cdots+x_{m_t}m_1\cdots m_{t-1}g_n=0$$

を得る．よって $K=0$ で，G と R は同型なのである．

2・5 可　　除　　群

群 G が任意の自然数 n に対し $nG=G$ を満足するとき，**可除群** (divisible group) という．そのための条件は，任意の素数 p に対し，$pG=G$ なることである．とくに G が p-群であれば，この p だけに対する $pG=G$ で十分である．

可除群の代表的な例は，前節末尾で述べたプリューファーの群と有理数の加法群である．また，可除群の直和も可除群であるから，プリューファーの群や有理数の加法群（と同型な群）いくつかの直和も可除群である．

命題 1　可除群に準同型な群は可除群である．

命題 2　A を群 G の部分群とし，G/A と A がともに可除群ならば，G も可除群である．

この2命題は，いずれも容易に示される．

命題 3　可除群 G の粋部分群 N は可除群である．

証明　任意の素数 p に対し，

$$pN=N\cap pG=N\cap G=N$$

であるから，N は可除群となる．　▮

定理 1 任意の群Gは，可除群の中にはめこむことができる．すなわち，Gを部分群としてふくむ可除群が存在する．

証明 2·4 節により，自由群Fとその部分群Kをとり，$F/K\cong G$ ならしめる．無限巡回群は有理数の加法群の中にはめこむことができるから，Fは有理数の加法群いくつかの直和Dの中にはめこむことができる．Dは可除群だから，命題1により，D/K も可除群で，その部分群 F/K がGと同型だから，Gは（D/K と同型な）可除群の中にはめこむことができる． ▌

一般の群Gの部分群Dが可除群であるとき，Gの可除部分群という．DがGの粋部分群なることは明らかであるが，さらに強く次のことが成り立つ．

定理 2 群Gの可除部分群Dは，Gの絶対直和因子である．

証明 Gの任意の粋部分群Nをとり，$D\cup N$がまた粋部分群なることを示そう．素数pに対し，

$$pg=d+n \quad (g\in G,\ d\in D,\ n\in N)$$

とすると，Dは可除群だから，$d=pd'$ ($d'\in D$) と書くことができ，$n=p(g-d')$ である．Nは粋部分群だから，$n=pn'$ ($n'\in N$) と表わせ，

$$pg=p(d'+n') \quad (d'\in D,\ n'\in N)$$

となるから，$D\cup N$は粋部分群である．よって1·4節の命題6により，DはGの絶対直和因子である．（$D\cap N=0$ なる仮定は，この場合はしなくてもよい．）▌

問 1 群Gが，Gを部分群としてふくむ任意の群Hで直和因子となるならば，Gは可除群である．

命題 4 群Gの可除部分群の族 $[D_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，その結び $\cup_{\lambda\in\Lambda}D_\lambda$ も可除部分群である．

これは，この結びの任意の元が $d_{\lambda_1}+\cdots+d_{\lambda_r}$ ($d_{\lambda_i}\in D_{\lambda_i}$) の形に表わされることから容易に示される．

命題 5 任意の群Gに，最大可除部分群が（一意的に）存在する．

Gのすべての可除部分群の結びをとって，前命題を用いればよい．

群Gの可除部分群が0以外にないとき，Gを**被約群** (reduced group) という．

定理 3 任意の群Gは，$G=D+A$ と直和に分解される．ここにDはGの最大可除部分群で，Aは被約群である．

証明 命題5によりGの最大可除部分群Dをとり，定理2により $G=D+A$

と直和に分解すると，Dが最大可除部分群なることから，Aは被約群となる． ▌

定理 4 Dを一つの可除群とする．任意の群Gの任意の部分群HからDの中への準同型写像ηは，GからDの中への準同型写像に拡張できる．

証明 HをふくむGの部分群Aであって，AからDの中へのある準同型写像θがηの拡張になっているような，部分群Aと準同型写像θの組 $[A, \theta]$ の全体を考える．このような二つの組 $[A, \theta]$ と $[A', \theta']$ に対し，順序関係 $[A, \theta] \leqq [A', \theta']$ を，$A \subseteqq A'$ でかつ θ' がθの拡張になっていることとして定義する．するとこの順序集合はツォルンの補題の仮定を満たす．すなわち，

$$[A_1, \theta_1] \leqq \cdots \leqq [A_\alpha, \theta_\alpha] \leqq \cdots$$

なる任意の全順序集合があれば，$A^\circ = \bigcup_\alpha A_\alpha$ とおき，A° からDの中への準同型写像θを，A° の元aが A_α にふくまれるなら，$\theta a = \theta_\alpha a$ として定義すると，αのとり方に関せず θa が一意的にきまるのである．かくて，この全順序集合の上端 $[A^\circ, \theta]$ が得られる．したがってツォルンの補題により極大元 $[A^*, \theta^*]$ が存在する．$A^* = G$ なることを示せばよい．そうでないとすると，$g \notin A^*$ なるGの元gがとれる．gのある自然数倍が A^* にふくまれるならば，そのような自然数の最小数 n をとり，$ng = a_0 \in A^*$ とする．D は可除群だから，$nx = \theta^* a_0$ なる元 $x \in D$ が存在する．そこで写像 θ^{**} を

$$\theta^{**}(a + tg) = \theta^* a + tx \quad (a \in A^*,\ 0 \leqq t < n)$$

で定義すれば，部分群 $\{A^*, g\}$ からDの中への準同型写像で θ^* の拡張となっているものが得られ，$[A^*, \theta^*]$ の極大性に反する．また，gの自然数倍が A^* にふくまれないならば，D の任意の元xをとって，やはり上式により θ^{**} を定義する．（この場合 $0 \leqq t < n$ の条件はいらない．）いずれにしても $[A^*, \theta^*]$ の極大性に反し，$A^* = G$ なることがわかる． ▌

群Gを部分群としてふくむ可除群Dであって，GがDの本部分群であるとき，DをGの**可除包** (divisible closure) という．

命題 6 群Dが群Gの可除包であるための条件は，DがGをふくむ極小の可除群なることである．

証明 DがGの可除包とし，$D \supset D' \supseteqq G$ なる可除部分群 D' が存在したとする．D' はDの直和因子だから，$D = D' + A$ と直和分解され，$A \neq 0$ である．

しかるに一方，$G\cap A=0$ であるから，これは G が D の本部分群なることに反するのである．逆に，D が G をふくむ極小可除群とする．D における G の本包を G' とすると，G' は D の粋部分群だから，命題3により可除群で，D の極小性から $D=G'$ となり，G は D の本部分群である．ゆえに D は G の可除包である．▌

定理 5　任意の群 G に対し，その可除包 D が存在する．また，群 G から群 G' の上への同型写像 θ があり，D' を G' の可除包とすると，θ を D から D' の上への同型写像に拡張できる．

証明　G を定理1により可除群 H の中にはめこみ，H における G の本包を D とすると，D は H の粋部分群だから，命題3により可除群で，G の可除包となる．

定理の後半を証明するため，定理4により，θ を D から D' の中への準同型写像 μ に拡張できる．命題1により μD は可除群で，かつ G' をふくむから，命題6により $\mu D=D'$ となる．また，μ の核を K とすると，θ は同型写像だから，$K\cap G=0$ で，G は D の本部分群だから，$K=0$ でなければならない．ゆえに μ は D から D' の上への同型写像である．▌

定理 6　任意の可除群は，有理数の加法群およびプリューファーの群の直和に分解できる．

証明　G を可除群とし，T をその最大ねじれ部分群とすると，T は G の粋部分群だから，また可除群となる．よって $G=T+F$ と分解され，F はねじれのない群で，G の粋部分群として，やはり可除群である．

ねじれ可除群 T を，すべての素数 p につき，p-準素成分 T_p の直和に分解すると，T_p も可除群である．T_p の台部分群は初等 p-群だから，基 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_p}$ をとり，T_p が可除群なることから，各 $\lambda\in\Lambda_p$ につき，元列 $a_{\lambda 1},\cdots,a_{\lambda n},\cdots$ を，

$$a_{\lambda 1}=a_\lambda,\ pa_{\lambda 2}=a_{\lambda 1},\cdots,pa_{\lambda n+1}=a_{\lambda n},\cdots$$

なるようにとる．$a_{\lambda 1},\cdots,a_{\lambda n},\cdots$ から生成された T_p の部分群 A_λ は，プリューファーの群である．それはほとんど明らかだが，きちんと証明するためには，生成団 $c_1,c_2,\cdots$ と基本関係

$$pc_1=0,\ \ c_1-pc_2=0,\ \ c_2-pc_3=0,\cdots$$

で定義されるプリューファーの群 C に対し，c_i と $a_{\lambda i}(i=1,2,\cdots)$ を対応させ

ると，

$$pa_{\lambda 1}=0,\ \ a_{\lambda 1}-pa_{\lambda 2}=0,\ \ a_{\lambda 2}-pa_{\lambda 3}=0, \cdots$$

であるから，2・4 節の定理 2 により，c_i を $a_{\lambda i}$ に写すような C から A_λ の上への準同型写像が存在する．その核を K_λ とし，$K_\lambda \neq 0$ とすると，C の位数 p の巡回部分群は $\{c_1\}$ だけであるから，$c_1 \in K_\lambda$ である．よってこれに対応する $a_{\lambda 1}=a_\lambda$ は 0 となり，a_λ が位数 p の元なることに反する．これで $C \cong A_\lambda$ が証された．

さて，$\{a_\lambda\}$ は A_λ の台部分群で，p-群の台部分群は本部分群だから，1・4 節の命題 4 により，部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_p}$ は独立で，$\sum_{\lambda \in \Lambda_p} A_\lambda = A_p$ とおけば，A_p は T_p の台部分群をふくむから，T_p の本部分群で，一方プリューファーの群の直和として，可除群だから，T_p の粋部分群である．ゆえに $T_p=A_p = \sum_{\lambda \in \Lambda_p} A_\lambda$ が証された．

今度はねじれのない可除群 F において，極大独立集合 $[f_\mu]_{\mu \in M}$ をとる．F は可除群であるから，各 $\mu \in M$ と任意の自然数 n に対し，$ng_{\mu n}=f_\mu$ なる F の元 $g_{\mu n}$ をとる．すると，任意の自然数 m, n に対し，

$$mg_{\mu m}=f_\mu=mng_{\mu mn}$$

であるが，F はねじれのない群だから，

$$g_{\mu m}=ng_{\mu mn}$$

が得られる．したがって，有理数の加法群 R が，生成元 $r_1, r_2, \cdots$ と基本関係

$$r_m - nr_{mn}=0 \quad (m, n \text{ は任意自然数})$$

で定義されることから，2・4 節の定理 2 をふたたび用いて，r_n を $g_{\mu n}$ ($n=1, 2, \cdots$) に写すような，R から B_μ の上への準同型写像が存在する．(B_μ とは $g_{\mu 1}$, $g_{\mu 2}, \cdots$ から生成される部分群である．) R の任意の元は，ある自然数 n に対し，xr_n (x は整数) の形に表わされ，その像 $xg_{\mu n}$ が 0 になるのは，$g_{\mu n}$ が無限位数だから，$x=0$ のときに限る．かくて $R \cong B_\mu$ が示された．

さて，各 $\mu \in M$ につき $\{f_\mu\}$ は B_μ の本部分群で，部分群の族 $[\{f_\mu\}]_{\mu \in M}$ は独立だから，$[B_\mu]_{\mu \in M}$ も独立である．$\sum_{\mu \in M} B_\mu = B$ とおくと，B は可除群だから，F の粋部分群である．一方，$[f_\mu]_{\mu \in M}$ は F の極大独立集合だから，$\sum_{\mu \in M} \{f_\mu\}$ は F の本部分群で，B はこれをふくむから，やはり F の本部分群である．ゆえに $F=B=\sum_{\mu \in M} B_\mu$ となり，証明が完了した．　▌

2·6　n-拡　大

群Gを本部分群としてふくむ群Xであって，自然数nに対し，$nX=G$ となるとき，XをGの **n-拡大**という．

定理 1　任意の群Gと任意の自然数nに対し，Gの n-拡大が存在する．

証明　Gの可除包をDとし，Dにおいて部分群 $X=n_D^{-1}G$ をとる．すなわち，Xとは $nx\in D$ なる $x\in D$ の全体である．$nX\subseteq G$ なることと，GがXの本部分群なることは明らかだから，$G\subseteq nX$ をいえばよい．Gの任意の元 g をとり，Dは可除群だから，$g=nd$ なるDの元dをとれば，$d\in n_D^{-1}G=X$ で，$G\subseteq nX$ が証された．　▌

定理 2　群Gの n-拡大は，Gから一意的に定まる．すなわち，X, Yをそれぞれ群 G, H の n-拡大とし，GからHの上への同型写像ηがあれば，ηをXからYの上への同型写像に拡張することができる．

証明　$n=p_1p_2\cdots p_k$ (p_i は素数) とすれば，各 i につき，$p_{i+1}\cdots p_kX$ は $p_i\cdots p_kX$ の p_i-拡大であるから，nが素数pのときに証明すればよい．XがGの p-拡大で，Xの可除包をDとすると，DはGの可除包ともなっている．しかるに，$X=p_D^{-1}G$ なることを示そう．$pX=G$ だから，$X\subseteq p_D^{-1}G$は明らかである．$d\in p_D^{-1}G$ とすると，$pd\in G=pX$ だから，$pd=px(x\in X)$ と表わされ，$p(d-x)=0$ となる．GはDの本部分群だから，Dの素数位数の元はGにふくまれ，$d-x\in G$ が得られ，$G\subseteq X$ だから，$d\in X$ となる．かくて $X=p_D^{-1}G$が証されたから，2·5 節の定理5により，定理の証明が完了する．　▌

命題 1　巡回群の n-拡大は巡回群である．

証明　$G=\{a\}$ を無限巡回群とする．別の無限巡回群 $H=\{b\}$ をとり，$nH=\{nb\}$ を作ると，Hは nH の n-拡大だから，定理2により，Gから nH の上への同型写像を，Gの任意の n-拡大XからHの上への同型写像に拡張できる．ゆえにXは巡回群である．

$G=\{a\}$ が位数mの有限巡回群とする．nの素因子の中で，mにふくまれぬものをnから除いたものを n' として，位数 mn' の巡回群 $H=\{b\}$ をとると，$n'H$ の位数はmで，かつ $n'H=nH$ である．($n=n'n''$ とすると，n'' の素因子はmを割らないから，$n''(n'H)=n'H$ である．) また，nH はHの本部分群

である（2・2 節の命題2）．ゆえにHは nH の n-拡大で，前と同様に，Gの任意の n-拡大はHと同型な巡回群となる．　▌

命題 2　群Xが群Gの n-拡大で，$G=\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$（$G_\lambda$ はすべて0ならず）とすると，$X=\sum_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ と直和分解される．ここに各 X_λ は G_λ の n-拡大である．

証明　各 G_λ の n-拡大 $\bar{X}_\lambda$ をとり，その制限直和を $\bar{X}$ とすると，Gはその部分群 $\bar{G}$ と同型である．そして，$\bar{X}$ は $\bar{G}$ の n-拡大だから，定理2により，G から $\bar{G}$ の上への同型写像を，X から $\bar{X}$ の上への同型写像に拡張できる．この写像で，$\bar{X}_\lambda$（正確には，それと同型な $\bar{X}$ の部分群 $\bar{X}_\lambda'$）の原像を X_λ とすると，$X=\sum_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ で，かつ X_λ は G_λ の n-拡大である．　▌

命題 3　任意の群Gと任意の素数pに対し，

$$G=P_1+G_1$$

と直和分解される．ここに P_1 は初等 p-群で，G_1 は pG の p-拡大である．

補題　群Gに3部分群 A, B, C があって，

$$A\cap B=0,$$

$$C\supseteq B,$$

$$G/B=(A+B)/B+C/B$$

とすれば，

$$G=A+C$$

補題の証明　$((A+B)/B)\cap(C/B)=B/B$ から $A\cap C\subseteq(A+B)\cap C=B$ で，$A\cap C\subseteq A\cap B=0$，すなわち $A\cap C=0$ を得る．また，$G/B=((A+B)/B)\cup(C/B)$ から，$G=(A+B)\cup C=A\cup B\cup C=A\cup C$ である．ゆえに $G=A+C$ となる．

命題の証明　群Gにおいて，$P=p_G{}^{-1}0$ とおけば，Pは初等 p-群である．$P'=P\cap pG$ とすると，2・3 節の命題5により，$P=P_1+P'$ と直和分解され，$P_1\cap pG=0$ である．そして，G/pG も初等 p-群だから，

$$G/pG=(P_1+pG)/pG+G_1/pG$$

なる $G_1(\supseteq pG)$ がとれて，補題により

$$G=P_1+G_1$$

となる．p 倍して $pG=pG_1$ となるから，G_1/pG は G_1/pG_1 と同型で，ねじ

れ群である．また，G_1 の素数位数 q の元は，$q \neq p$ のとき，pG_1 にふくまれるから，pG にふくまれる．$q=p$ のとき，$P=P_1+p_{G_1}{}^{-1}0$ と $P=P_1+P'$ および $P'=P\cap pG=P\cap pG_1\subseteq p_{G_1}{}^{-1}0$ から，1·4 節の問1により，$p_{G_1}{}^{-1}0=P'=P\cap pG$ を得る．よって G_1 の位数 p の元は pG にふくまれ，pG が G_1 の本部分群なることがわかった．ゆえに G_1 は pG の p-拡大である． ▌

群 G がある自然数 n に対し $nG=0$ を満足するとき，G を **n-有界** という．あるいは，かかる n が存在するとき，単に**有界** (bounded) という．

定理 3 有界群は巡回群の直和である．

証明 群 G が n-有界とし，$n=p_1p_2\cdots p_r$ (p_i は素数) とする．$r=1$ なら G は初等 p_1-群だから，巡回群の直和である．よって $r>1$ とし，n の素因数の個数（同じものも重複して数える）が $r-1$ のときはすでに証されたとする．命題3により，

$$G=P_1+G_1$$

(P_1 は初等 p_1-群で，G_1 は p_1G の p_1-拡大) と分解される．p_1G は $p_2\cdots p_r$ 有界だから，帰納法の仮定により，巡回群の直和である．したがって，命題1と命題2から，G_1 は巡回群の直和である．初等 p_1-群として，P_1 もそうであるから，G は巡回群の直和となる． ▌

2·7 階 数

ツオルンの補題により，群 G の任意の独立部分集合は，ある極大独立集合にふくまれるわけであるが，その際，独立集合に対し，そのすべての元が無限位数か素数ベキ位数である，という条件（これを位数条件とよぼう）をつけても，同様のことが成り立つ．すなわち，群 G の位数条件を満たす独立集合は，位数条件と独立性をともに満たす極大な集合 S にふくまれる．するとこの S は，位数条件をつけないでも，やはり G の極大独立集合になっていることは容易にわかる．したがって，$\{S\}$ は G の本部分群なのである．

与えられた群 G に対し，位数条件を満たす極大独立集合の濃度を $r(G)$ で表わし，G の**階数** (rank) という．また，無限位数の元のみよりなる，G の極大独立集合の濃度を $r_0(G)$ で表わし，G の**ねじれのない階数**という．そして，一定素数 p に対し，p のベキを位数とする元のみよりなる，G の極大独立集合

の濃度を $r_p(G)$ で表わし，Gの **p-階数** という．

定理 1　任意の群Gに対し，$r(G)$，$r_0(G)$ および各素数pに対する $r_p(G)$ は，Gから一意的に定まる*)．

まず，次の命題から始める．

命題 1　p-群Gの階数 $r(G)=r_p(G)$ は，Gから一意的に定まる．

証明　Gの台部分群をPとすると，Pは初等 p-群だから，2・3 節の命題4と命題6により，$r(P)$ は Pから，したがってGから一意的に定まる．よって，$r(G)=r(P)$ なることを示せばよい．Gの極大独立集合 $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ をとり，各 a_λ の位数を p^{e_λ} として，$[p^{e_\lambda-1}a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ を作ると，2・3 節の命題2により，Pの独立部分集合になる．しかも，ちょうどPの極大独立集合である．何故なら，Pである集合Sをつけ加えてもまだ独立なら，$[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ にSをつけ加えても独立で，極大性に反するからである．よって $r(G)=r(P)$ となる．▌

命題 2　ねじれのない群Gの階数 $r(G)$ は，Gから一意的に定まる．

証明　Gの任意の極大独立集合をSとする．Gの可除包をDとすると，GはDの本部分群だから，SはDの極大独立集合である．また，Gはねじれのない群で，Dの素数位数の元はみなGにふくまれるはずだから，Dもねじれのない群である．よって2・5節の定理6により，Dは有理数の加法群の直和である．したがって，Dは有理数体上のベクトル空間と見てよく，その極大独立集合Sは，（ベクトル空間の）基となり，その濃度はDから一意的に定まる．そして，DはGから一意的に定まるから，$r(G)$ の一意性が証された．▌

命題 3　任意の群Gの最大ねじれ部分群をTとすれば，$r_0(G)=r(G/T)$ である．

証明　$a_1,\cdots,a_k$ を G の独立な無限位数の元とし，$a_i^*=a_i+T\,(i=1,\cdots,k)$ とおく．もし $m_1a_1^*+\cdots+m_ka_k^*=0^*$ ならば，$m_1a_1+\cdots+m_ka_k=b\in T$ である．そこで $O(b)=n$ とすると，n は自然数で，$nm_1a_1+\cdots+nm_ka_k=0$ であり，a_i の独立性から，$nm_i=0$，したがって $m_i=0\,(i=1,\cdots,k)$ が得られる．よって，$a_1^*,\cdots,a_k^*$ は G/T で独立である．逆に a_i^* が独立なら，$\sum_i m_ia_i=0$ から $\sum_i m_ia_i^*=0^*$ が得られ，各 $m_i=0$ となるから，a_i は独立となる．（か

*)　この定理から，2・5 節の定理6の直和分解の（同型なものを同一視した）一意性が，直ちに得られる．

つ，a_i^* が無限位数だから，a_i も無限位数である．）よって，$[a_\lambda^*]_{\lambda\in\Lambda}$ が G/T で極大独立集合になるための条件は，$[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ が G で無限位数の元のみよりなる極大独立集合なることである．したがって，$r_0(G)=r(G/T)$ が示された． ▌

以上により，任意の群 G をとるとき，$r_0(G)$ と各素数 p に対する $r_p(G)$ の一意性が示されたから，$r(G)$ の一意性をいうには，次の命題がいえればよい．

命題 4 任意の群 G に対し，次の等式が成り立つ．

$$r(G)=r_0(G)+\sum_p r_p(G)$$

ただし $\sum_p$ はすべての素数 p にわたらせる．

証明 位数条件を満たす任意の極大独立集合 S をとり，S の元中無限位数のもの全体を S_0，また各素数 p に対し，位数が p のベキなるもの全体を S_p とすれば，S は S_0 およびすべての S_p の，共通元のない和集合である．したがって，

$$|S|=|S_0|+\sum_p|S_p|$$

となる．S_0 は無限位数の元のみよりなる G の極大独立集合で，各 S_p は位数が p のベキの元のみよりなる G の極大独立集合なることは明らかである．ゆえに $|S_0|=r_0(G)$，$|S_p|=r_p(G)$ で，命題が証されたことになる． ▌

命題 5 群 G の部分群 A に対し，

$$r(G)\leqq r(G/A)+r(A)$$

が成り立つ．

証明 A の一つの（位数条件をつけた）極大独立集合 S をとると，$\{S\}$ は A の本部分群である．次に，S をふくむ（位数条件をつけた）G の極大独立集合が，S に S' をつけ加えて得られるものとしよう．$\{S\}\cap\{S'\}=0$ だから，$A\cap\{S'\}=0$ で，S' は $\bmod A$ でも独立となり，S' の濃度は $r(G/A)$ をこえない．したがって，

$$r(G)=|S'|+|S|\leqq r(G/A)+r(A)$$

が得られる． ▌

命題 6 階数有限な p-群 G は，有限個の巡回 p-群とプリューファーの群 $C(p^\infty)$ の有限個の直和である．

証明 $G=A+D$（D は G の最大可除部分群）とすると（2·5 節の定理 3），D は階数有限の可除 p-群だから，有限個の $C(p^\infty)$ の直和である（2·5 節の定

理6). 次に, Aが有限個の巡回 p-群の直和になることを証明するために, 準備として, p-群Bに対し $B \neq pB$ なるとき, pB に属さぬ最小位数 (それを p^h とする) の元bをとるならば, $p^{h-1}b$ は $p_B{}^{-1}0$ に属するが p^hB には属さぬことを示そう. 実際 $p^{h-1}b = p^hb' (b' \in B)$ とすると, $p^{h-1}(b-pb')=0$ で, hの定義により, $b-pb'=pb''(b'' \in B)$ で, $b \in pB$ となって仮定に反するからである. さて, Aは階数有限だから, 台部分群Pは有限群で, 部分群の列

$$P \cap p^1A \supseteq P \cap p^2A \supseteq \cdots$$

は無限列ではあり得ないから, あるkから先は,

$$P \cap p^kA = P \cap p^{k+1}A = \cdots$$

となる. $p^kA=B$ とおけば, 前述のことから, $B \neq pB$ ではあり得ない. ゆえに $B=pB$ で, Aは被約 p-群だから, $B=0$ である. したがって $p^kA=0$ で, Aは有界群となり, 巡回群の直和である. 一方, 階数が有限なのであるから, 有限個の巡回 p-群の直和なのである. ▌

命題 7 被約 p-群Gが無限群であれば, $r(G)=|G|$ である.

証明 前命題により, Gは階数有限ではあり得ない. したがって台部分群Pは無限群で, 2·1 節の命題6により, $r(G)=r(P)=|P|=|G|$ となる. ▌

2・8 純粋部分群

群Gの部分群Aが, 任意の自然数nに対し,

$$nA = A \cap nG$$

を満足するとき, Gの**純粋部分群** (pure subgroup) という.

命題 1 群Gの直和因子は, Gの純粋部分群である.

これは2·1節の命題2から明らかである.

また, 純粋部分群は粋部分群であるが, 逆はかならずしも成立しない.

問 1 素数pに対し, $G=\{a\}+\{b\}$, $O(a)=p^c$, $O(b)=p^d$, $c \geqq 1$, $d \geqq c+2$ とすると, 巡回部分群 $\{a+pb\}$ は, Gの粋部分群であるが, 純粋部分群ではない.

問 2 ねじれのない群の粋部分群は, 純粋部分群である.

命題 2 Aが群Gの純粋部分群で, BがAの純粋部分群ならば, BはGの純粋部分群である.

命題 3 群 G の純粋部分群の族 $[A_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ が, 包含関係につき全順序集合を

なすならば，その結び $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ も G の純粋部分群である．

この二つは，定義から容易に得られる．

問 3 A が群 G の純粋部分群で，B が A の部分群ならば，A/B は G/B の純粋部分群である．

問 4 $A, B(A\supseteq B)$ を群 G の部分群とし，B は G の，また A/B は G/B の，それぞれ純粋部分群とすれば，A は G の純粋部分群である．

定理 1 群 G の部分群 A が，G の純粋部分群なるための条件は，A を法とする G の任意の剰余類が，その類としての位数に等しい，(G での) 位数をもつ G の元をふくむことである．

証明 A が G の純粋部分群とする．G/A の任意の元 x^* をとるとき，もし $O(x^*)=0$ とすれば，任意 $x\in x^*$ がまた $O(x)=0$ を満たす．$O(x^*)=n$ (自然数) とすると，$y\in x^*$ をまずとり，$ny\in A\cap nG=nA$ から，$ny=na(a\in A)$ と表わされ，$y-a=x$ とおけば，$nx=0$ だから，x の位数は n の約数である．しかし一方，$x\in x^*$ で，x^* の位数が n だから，x の位数は n の真の約数ではあり得ない．すなわち $O(x)=n$ となる．逆に，定理の条件が満たされているとする．G の元 g が自然数 n につき $ng=a\in A$ とすると，$g+A$ から元 h を，剰余類 g^* と h が同じ位数 m なるように，とることができる．$ng^*=0^*$ だから，m は n の約数で，$nh=0$ となる．よって $a=n(g-h)\in nA$ で，A が G の純粋部分群なることがわかる． ▌

命題 4 A が群 G の純粋部分群で，G/A が巡回群の直和ならば，A は G の直和因子である．

証明 G/A の基 $[g_\lambda^*]_{\lambda\in\Lambda}$ をとり，各 g_λ^* から，定理 1 により，g_λ^* と同じ位数の G の元 g_λ をとると，$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda g_\lambda=a\in A$ から $\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda g_\lambda^*=0^*$ が得られ，各 $x_\lambda g_\lambda^*=0^*$ が各 $x_\lambda g_\lambda=0$ を導くことになる．ゆえに $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ から生成された部分群 G' は，$G'\cap A=0$ をみたす．一方，G/A の任意の元は g_λ^* の 1 次結合だから，G の任意の元は g_λ の 1 次結合と A の元との和である．よって $G=G'+A$ となる． ▌

命題 5 A を群 G の純粋部分群とすれば，

$$r(G/A)\leqq r(G)$$

証明 G/A の任意の (位数条件をつけた) 極大独立集合 $[g_\lambda^*]_{\lambda\in\Lambda}$ をとり，各 g_λ^* から同じ位数の G の元 g_λ をとると，前命題の証明と同様にして，

$[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ の独立性が得られるからである. ▌

問 5 群 G の部分群 A が，すべての素数 p とすべての自然数 k に対し，$p^kA=A\cap p^kG$ を満足するならば，A は G の純粋部分群である.

問 6 p-群 G の部分群 A が，すべての自然数 k に対し，$p^kA=A\cap p^kG$ を満足するならば，G の純粋部分群である.

問 7 群 G の最大ねじれ部分群は，G の純粋部分群である．p-準素成分も同様である.

命題 6 p-群 G の部分群 A において，位数 p の元が G でも A でも同じ高度をもつならば，A は G の純粋部分群である.

証明 A の元 $a\neq 0$ の位数を p^n とし，a より位数の小さい A の元は，G でも A でも同じ高度をもつことがすでに証されたとする．$p^kg=a(g\in G)$ とすると，$p^{k+1}g=pa$ の位数は a のそれより小さいから，$p^{k+1}a'=pa$ なる $a'\in A$ が存在する．よって，$p^ka'-a$ は A に属し，0 かまたは位数 p だから，命題の仮定により，$p^ka'-a=p^k(a'-g)=p^ka''(a''\in A)$ と表わされる．ゆえに，$a=p^k(a'-a'')\in p^kA$ となって，A は純粋部分群となる. ▌

群 G が一定素数ベキ $p^k(k\geqq 1)$ を位数とする巡回群の直和なるとき，**p^k-初等群**という.

命題 7 G が p^k-初等群ならば，任意自然数 $i(\leqq k)$ につき，$p_G{}^{-i}0\subseteq p^{k-i}G$ である.

証明 位数 p^k の巡回群でこれは明らかだから，その直和である G でも成り立つ. ▌

命題 8 素数ベキ p^k に対し，群 G が p^k-有界群で，かつ G の部分群 A が p^k-初等群ならば，A は G の絶対直和因子である.

証明 $A\cap B=0$ なる G の粋部分群 B をとる．G は p-群だから，この p に対し，

$$pg=a+b \quad (g\in G,\ a\in A,\ b\in B)$$

なら $a+b\in p(A+B)$ なることを示せばよい．p^{k-1} をかけると，

$$p^kg=p^{k-1}a+p^{k-1}b=0$$

で，$A\cap B=0$ だから，$p^{k-1}a=p^{k-1}b=0$ となる．A は p^k-初等群だから，命題 7 により，$a=pa'$ $(a'\in A)$ と表わされ，$b=p(g-a')\in pG$ となる．B は G の 粋部分群だから，$b=pb'$ $(b'\in B)$ となり，

$$pg=p(a'+b') \quad (a'+b'\in A+B)$$

が得られて，証明が完了する． ▮

命題 9 群 G の部分群 A が p^k-初等群で，かつ $A\cap p^kG=0$ ならば，AはGの直和因子である．

証明 $A\cong(A+p^kG)/p^kG$ は p^k-初等群で，G/p^kG は p^k-有界群だから，命題8により，

$$G/p^kG=(A+p^kG)/p^kG+B/p^kG$$

なる $B\supseteq p^kG$ がとれる．ゆえに2·6 節の命題3の補題により，$G=A+B$ となる． ▮

セレの補題 群Gの純粋部分群Aが p^k-初等群ならば，AはGの直和因子である．

証明 $p^kA=A\cap p^kG$ と $p^kA=0$ から，$A\cap p^kG=0$ を得るからである． ▮

定理 2 群Gの有界純粋部分群Aは，Gの直和因子である．

証明 Aは有界群だから，有限巡回群の直和で，$A=P+A'$ と直和分解できる．ここにPはある素数ベキ p^k に関する p^k-初等群で，A'の元の位数の上限は，Aのそれより小である*)．AがGの純粋部分群で，Pは（直和因子として）Aの純粋部分群だから，命題2により，PはGの純粋部分群である．よってセレの補題により，$G=P+G'$ と分解される．$A\supseteq P$ だから，1·4 節の命題5により，$A=P+(A\cap G')$ で，$A'\cong A/P\cong A\cap G'$ である．$A\cap G'$ はAの純粋部分群で，A が G の純粋部分群だから，$A\cap G'$ は G の，したがってまたG' の，純粋部分群である．よって，A' の元の位数の上限が A のそれより小なることから，帰納法を用いて，$A\cap G'\cong A'$ は G' の直和因子となり，$G'=(A\cap G')+B$ となるから，$G=P+G'=P+(A\cap G')+B=A+B$ で，AがGの直和因子となる． ▮

---

*) A を素数ベキ位数の巡回群の直和に分解し，それらの位数の最大数を p^k として，位数 p^k の巡回群だけの直和を P とおけばよい．

第3章 可算的操作

有限的操作を可算無限回行なうことが，すなわち可算的操作であるが，こうしたあいまいもこたることばの意味は，本章を実際に通読されれば，自然に了解されるであろう．3·1 節では，初等 p-群の基に対しややくわしい考察を行ない，相補的な基および主基について諸命題を証明する．3·2 節では，その応用として，巡回群の直和となる群につき，クリコフの定理を中心にして述べる．3·3 節では，やはりクリコフによって創められた，基部分群の理論を述べるが，だいたい後章での応用を目当てにして，叙述の範囲を限定することにした．したがって，たとえば閉じた p-群に関する諸定理などははぶいてあるのである．

3·1 相補的な基と主基

初等 p-群 G の部分群を A とするとき，G の部分集合 S が，G の A に対する**相補的な基**であるとは，S が独立であって，かつ $G=\{S\}+A$ なることをいう．

命題 1 初等 p-群 G の任意の部分群 A に対し，G の A に対する相補的な基が存在する．

これは2·3節の命題4，命題5から明らかである．

命題 2 初等 p-群 G の部分群 A に対する相補的な基 S の濃度は，G/A の階数に等しい．

証明 $\{S\}\cong G/A$ で，$|S|=r(\{S\})$ だからである． ▌

以下，簡単のため，記号 G は常に一定の初等 p-群として，すべてこの G の中で考えて行くことにする．

G の部分群の可算降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots \tag{3·1}$$

が与えられたとする．各 i $(i=0,1,2,\cdots)$ につき，命題1により，A_i の A_{i+1} に対する相補的な基 $\mathfrak{a}_i$ をとる．$\mathfrak{a}_i$ の元は A_i に含まれ，A_{i+1} には含まれないから，異なる i について $\mathfrak{a}_i$ の間には共通元はない．これらすべての $\mathfrak{a}_i$ の和集

合 $\mathfrak{a}$ を，Gの部分群の可算降列（3·1）の一つの**相補的な基**という．

命題 3 G の部分群の可算降列（3·1）の相補的な基を $\mathfrak{a}$ とすれば，すべての $i\geqq 0$ につき，A_i の任意の元は，$\mathfrak{a}_i$ の元の1次結合と A_{i+1} の元との和の形に表わされる．ただし $\mathfrak{a}_i$ は A_i に含まれ A_{i+1} に含まれぬ $\mathfrak{a}$ の元全体である．

これは定義から明らかである．

命題 4 相補的な基は独立である．

証明 前と同様，（3·1）に対し，A_i の A_{i+1} に対する相補的な基 $\mathfrak{a}_i$ をとり，$\vee_i\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}$ とする[*]．$\{\mathfrak{a}_i\}\cap A_{i+1}=0$ だから，$\{\mathfrak{a}_i\}\cap(\{\mathfrak{a}_{i+1}\}\cup\{\mathfrak{a}_{i+2}\}\cup\cdots)=0$ で，任意有限個の整数 $0\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r$ に対し，

$$\{\mathfrak{a}_{i_1}\}\cap(\{\mathfrak{a}_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\mathfrak{a}_{i_r}\})=0,$$
$$\{\mathfrak{a}_{i_2}\}\cap(\{\mathfrak{a}_{i_3}\}\cup\cdots\cup\{\mathfrak{a}_{i_r}\})=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{\mathfrak{a}_{i_{r-1}}\}\cap\{\mathfrak{a}_{i_r}\}=0$$

で，1·4節の命題2により，$\{\mathfrak{a}_{i_1}\},\cdots,\{\mathfrak{a}_{i_r}\}$の独立性がわかる．したがって $\mathfrak{a}_{i_1}\vee\cdots\vee\mathfrak{a}_{i_r}$ は独立で，$\mathfrak{a}$ は独立となる． ▌

Gの部分群の可算降列（3·1）に対し，A_0 の部分集合 $\mathfrak{a}$ が，すべての $i\geqq 0$ につき，$\mathfrak{a}\cap A_i$ が A_i の基をなす，という条件を満たすとき，$\mathfrak{a}$ を（3·1）の**主基**という．相補的な基はかならず存在するが，主基はかならずしも存在しない．

命題 5 Gの部分群の可算降列（3·1）の主基を $\mathfrak{a}$ とすると，$\mathfrak{a}$ の元中 A_i に含まれ A_{i+1} に含まれぬもの全体を $\mathfrak{a}_i$ とすれば，$\mathfrak{a}_i$ は A_i の A_{i+1} に対する相補的な基である[**]．

証明 $\mathfrak{a}$ の元中 A_{i+1} に含まれるもの全体を $\mathfrak{a}_i'$ とすると，主基の定義により，$\mathfrak{a}_i\vee\mathfrak{a}_i'$ が A_i の基で，$\mathfrak{a}_i'$ が A_{i+1} の基だから，$\mathfrak{a}_i$ は A_i の A_{i+1} に対する相補的な基である． ▌

命題 6 （3·1）における A_i の A_{i+1} に対する相補的な基を $\mathfrak{a}_i$ として，$A_i'=\{\mathfrak{a}_i\}+\{\mathfrak{a}_{i+1}\}+\cdots$ とおけば，$A_i'=A_0'\cap A_i$ である．また，部分群の可算降列

$$A_0'\supseteq A_1'\supseteq A_2'\supseteq\cdots$$

---

[*] 1·2節でも述べたように，$\vee$は和集合を意味し，$\cup$は部分群の結びを意味する．

[**] この命題は，主基から相補的な基が導かれることを示す．

に対し，$\mathfrak{a}=\bigvee_i\mathfrak{a}_i$ はその主基となる*)．

証明 $A_i'\subseteq A_0'\cap A_i$ は明らかである．A_0' の元 $a\neq 0$ を $[\mathfrak{a}_j]_{j<\omega}$ の1次結合として表わすとき，0でないものが最初に $\mathfrak{a}_k$ で現われるとすると，$\mathfrak{a}_k$ が A_k の A_{k+1} に対する相補的な基だから，a は A_k に含まれ，A_{k+1} には含まれない．よって，もし $a\in A_i$ なら，$i\leqq k$ であり，$a\in A_i'$ となるのである．後半は A_i' の定義から明らかである． ▮

命題 7 (3·1) に対し，Gの部分群の可算昇列

$$A^{(0)}\subseteq A^{(1)}\subseteq A^{(2)}\subseteq\cdots$$

が存在して，$\bigcup_i A^{(i)}=A_0$ であり，各 $i\geqq 0$ につき，$A^{(i)}$ がその部分群の降列

$$A_0{}^{(i)}\supseteq A_1{}^{(i)}\supseteq A_2{}^{(i)}\supseteq\cdots$$

$$\text{ただし}\quad A_j{}^{(i)}=A^{(i)}\cap A_j\ \ (j=0,1,2,\cdots)$$

に関する主基 $\mathfrak{a}^{(i)}$ を有して，かつ

$$\mathfrak{a}^{(0)}\subseteq\mathfrak{a}^{(1)}\subseteq\mathfrak{a}^{(2)}\subseteq\cdots$$

ならば，$\mathfrak{a}^{(i)}$ の和集合 $\mathfrak{a}$ が (3·1) の主基となる．

証明 $\mathfrak{a}^{(i)}$ は独立であるから，$\mathfrak{a}$ も独立である．次に，任意の $k\geqq 0$ をとり，$\mathfrak{a}\cap A_k$ が A_k を生成することを示そう．A_k の任意の元 a をとり，$a\in A_0=\bigcup_i A^{(i)}$ により，$a\in A^{(i)}$ とすると，$a\in A^{(i)}\cap A_k=A_k{}^{(i)}$ だから，a は$\mathfrak{a}^{(i)}\cap A_k{}^{(i)}$ の元の1次結合として表わされ，したがって $\mathfrak{a}\cap A_k$ の元の1次結合として表わされるのである． ▮

これまでずっと，初等 p-群 G の部分群の可算降列を一般に考えて来たが，最後に，Gの部分群の有限降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq\cdots\supseteq A_r \tag{3·2}$$

を考察しよう．その主基$\mathfrak{a}$とは，すべての $i\,(0\leqq i\leqq r)$ につき，$\mathfrak{a}\cap A_i$ が A_i の基となる如き，A_0 の部分集合ということになる．これまで可算降列について述べてきたことは，$A_r=A_{r+1}=\cdots$ として，有限降列についてもすべてあてはまるが，有限降列については，とくに次のことが成り立つ．

命題 8 初等 p-群Gの部分群の有限降列 (3·2) に対し，その主基$\mathfrak{a}$が存在する．Gのもう一つの部分群の有限降列

$$B_0\supseteq B_1\supseteq\cdots\supseteq B_r \tag{3·3}$$

*) この命題は，相補的な基から主基が導かれることを示す．

が，等式

$$A_0 \cap B_i = A_i \quad (i=0, 1, \cdots, r) \tag{3·4}$$

を満たすならば，主基 $\mathfrak{a}$ を含む (3·3) の主基 $\mathfrak{b}$ をとることができる．

証明 命題の後半を少し変更して，“(3·2) が主基 $\mathfrak{a}$ をもつとき” という仮定を最初に加えることにすると，命題の前半も導かれることになる．何故なら，(3·2) として，$A_0 = \cdots = A_r = 0$ をとり，$\mathfrak{a}$ として空集合をとればよいからである．よって，上記のつけ加えた仮定の下に，命題の後半を証明しよう．

(3·2) が主基 $\mathfrak{a}$ を有したとし，$\mathfrak{a}$ の元中 A_i に含まれるが A_{i+1} に含まれぬもの全体を $\mathfrak{a}_i\,(i=0, \cdots, r-1)$ とすると，命題5により，$\mathfrak{a}_i$ は A_i の A_{i+1} に対する相補的な基である．また $\mathfrak{a}$ の元中 A_r に含まれるもの全体を $\mathfrak{a}_r$ とすれば，$\mathfrak{a}_r$ は A_r の基である．

さて，$0 \leqq i < r$ なる i に対し，

$$A_i \cap B_{i+1} = A_{i+1} \tag{3·5}$$

である．実際，(3·4) により，左辺 $\subseteq A_0 \cap B_{i+1} = A_{i+1}$ で，一方やはり (3·4) から $B_{i+1} \supseteq A_{i+1}$ だから，左辺 $\supseteq A_{i+1}$ となるのである．

そこで，$\mathfrak{a}$ を含む (3·3) の主基を構成しよう．まず B_r の A_r に対する相補的な基 $\mathfrak{b}_r$ をとると，和集合 $\mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ は B_r の基である．そして，$\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ は $A_{r-1} \cup B_r$ の基となる．何故なら，$\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r$ は A_{r-1} の基で，$\mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ が B_r の基だから，$\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ は $A_{r-1} \cup B_r$ を生成する．また，その任意の1次結合を $a_{r-1} + a_r + b_r$ (a_{r-1} は $\mathfrak{a}_{r-1}$ の1次結合，等々) として，これが0に等しければ，(3·5) により

$$a_{r-1} + a_r = -b_r \in A_{r-1} \cap B_r = A_r$$

で，$a_{r-1} = 0$，したがって，a_{r-1} のすべての項が0となる．さらに

$$a_r + b_r = 0$$

から，$a_r = b_r = 0$，したがって，a_r，b_r のすべての項が0となる．ゆえに $\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ は独立で，$A_{r-1} \cup B_r$ の基となるのである．そこで，B_{r-1} の $A_{r-1} \cup B_r$ に対する相補的な基 $\mathfrak{b}_{r-1}$ をとると，$\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_{r-1} \vee \mathfrak{b}_r$ は B_{r-1} の基となる．そして，その元のうち B_r に属するもの全体がちょうど $\mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ となる．何故なら，$\mathfrak{b}_{r-1}$ の元は $A_{r-1} \cup B_r$ にすら属しないし，$\mathfrak{a}_{r-1}$ の元は，$\mathfrak{a}_{r-1} \vee \mathfrak{a}_r \vee \mathfrak{b}_r$ の独立性から，B_r に属することはないのである．以下同様にし

て進めば，$\mathfrak{a}$ を含む（3・3）の主基 $\mathfrak{a}_0\vee\cdots\vee\mathfrak{a}_r\vee\mathfrak{b}_0\vee\cdots\vee\mathfrak{b}_r$ が得られることになる． ▌

3・2 巡回群の直和

pを一定の素数とする．群Gに対し $\cap_{n<\omega}p^nG=p^\omega G$ として，部分群 $p^\omega G$ を定義する．それは，p-群の場合，無限高度の元の全体である．

命題 1 p-群Gが巡回群の直和であれば，$p^\omega G=0$ である．

証明 巡回 p-群には0以外に無限高度の元がないことと，直和と高度との関係（2・1 節の命題8）から直ちに得られる． ▌

Gを p-群とし，台部分群をPとする．すべての整数 $i\geqq 0$ につき $P_i=P\cap p^iG$ とおいて得られる，$P=P_0$ の部分群の可算降列

$$P_0\supseteq P_1\supseteq P_2\supseteq\cdots$$

の主基を，p-群Gの**主基**という．

命題 2 p-群Gが巡回群の直和であるとし，その基を$\mathfrak{b}$とする．$\mathfrak{b}$ の元中位数 p^{i+1}（$i\geqq 0$）の元全体を $\mathfrak{b}_i$ とし，$p^i\mathfrak{b}_i=\mathfrak{a}_i$ とすると，$\mathfrak{a}=\vee_{i<\omega}\mathfrak{a}_i$ はGの主基である．

証明 $p^i\mathfrak{b}$ から0を除いたものが p^iG の基であるから，$P_i=P\cap p^iG$ の基は，ちょうど $\mathfrak{a}_i\vee\mathfrak{a}_{i+1}\vee\cdots$ で，それは $\mathfrak{a}\cap p^iG$ にほかならぬからである． ▌

定理 1 一つの群Gの，巡回群（無限または素数ベキ位数）の直和への分解の仕方は，同型な直和分解[*)]を同一視すれば，Gから一意的に定まる．

証明 G の直和因子のうち，無限巡回群の濃度は，G のねじれのない階数 $r_0(G)$ に等しく，一意的である．また各素数pにつき，巡回 p-群なる直和因子全体は，G の p-準素成分 G_p の直和分解を与え，その一意性は，前命題と3・1 節の命題2，命題5から得られる． ▌

命題 3 p-群Gの台部分群Pのある部分群Aに対し，$A\cap p^\omega G=0$ であり，かつ，$A_i=A\cap p^iG$（$i\geqq 0$）とおいて得られる $A=A_0$ の部分群の可算降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$$

が主基 $\mathfrak{a}$ をもてば，$\mathfrak{a}$ の元中高度 i の元 $a_{i\lambda}$ に $p^ib_{i\lambda}=a_{i\lambda}$ なる $b_{i\lambda}\in G$ をとって，元の族 $[b_{i\lambda}]_{i,\lambda}$（$i$ はすべての整数 $\geqq 0$，λ は各 i につき $a_{i\lambda}$ の添数集

---

*) 直和因子の間に一対一の対応がついて，対応するものが群として同型．

合 A_i の元にわたらせる）を作ると，これから生成されたGの部分群Bは，Gの純粋部分群である．

証明　2·8 節の命題6により，Bの位数pの元が，GでもBでも同じ高度をもつことを示せばよい．$\mathfrak{a}$ は独立だから，$[b_{i\lambda}]_{i,\lambda}$ も独立で，Bの台部分群 $P\cap B$ はAに一致する．よって，$i\geqq 0$ に対し，$P\cap B\cap p^iG=A\cap p^iG=A_i$ の任意の元bは，主基の定義から，$\mathfrak{a}\cap A_i$ の元の1次結合であり，$\mathfrak{a}\cap A_i$ の元はBである元の p^i 倍になることから*)，bは p^iB に含まれることになる．▌

定理 2　p-群Gが巡回群の直和となるための条件は，$p^\omega G=0$ で，かつGが主基を有することである．

証明　必要性はすでに示してある．十分性をいうために，$p^\omega G=0$ とし，Gが主基 $\mathfrak{a}$ をもつものとして，$\mathfrak{a}$ の元中高度 i のもの全体を $\mathfrak{a}_i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ とする．($p^\omega G=0$ により，$\mathfrak{a}$ のすべての元は有限高度である．) 命題3と同様，$\mathfrak{a}_i$ の各元 $a_{i\lambda}$ に $p^ib_{i\lambda}=a_{i\lambda}$ なる $b_{i\lambda}\in G$ をとり，その全体（すべての i, λ）を $\mathfrak{b}$ として，$\mathfrak{b}$ から生成された部分群をBとする．$\mathfrak{b}$ は独立だから，$B=G$ がいえれば証明が終わることになる．しかるに，命題3によりBはGの純粋部分群で，したがってGの粋部分群であり，一方 $\mathfrak{a}$ はGの台部分群Pの基になるから，$B\supseteq P$ である．ゆえに2·2節の命題3により，$B=G$ である．▌

クリコフの定理　p-群 G が巡回群の直和となるための条件は，G の台部分群Pが，高度有界の部分群 $P^{(i)}$ $(i=0,1,2,\cdots)$ の可算昇列の結びとなることである．($P^{(i)}$ の元の高度とは，Gでの高度をいうものとする．)

証明　p-群 G が巡回群の直和とし，G の主基 $\mathfrak{a}$ の元で高度 i のもの全体を $\mathfrak{a}_i$ $(i=0,1,\cdots)$ とすると，$\mathfrak{a}_0\vee\cdots\vee\mathfrak{a}_{i-1}$ から生成されたPの部分群 $P^{(i)}$**) は，$P^{(i)}\cap p^iG=0$ を満たすから，高度有界（0以外の元の高度 $\leqq i-1$）である．そして $\mathfrak{a}=\vee_i\mathfrak{a}_i$ だから，$P=\cup_iP^{(i)}$ である．

逆に，P が高度有界の部分群 $P^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ の可算昇列の結びとする．一方，各整数 $j\geqq 0$ につき，$P_j=P\cap p^jG$ とおき，$P_j{}^{(i)}=P^{(i)}\cap P_j$ とするならば，各 $P^{(i)}$ に部分群の可算降列

$$P^{(i)}=P_0{}^{(i)}\supseteq P_1{}^{(i)}\supseteq P_2{}^{(i)}\supseteq\cdots \tag{3·6}$$

*) $\mathfrak{a}\cap A_i$ の元 $a_{j\lambda}$ の高度 j は $j\geqq i$ を満たすから，$p^jb_{j\lambda}=a_{j\lambda}$ により，$a_{j\lambda}$ はBである元の p^i 倍となる．

**) $i=0$ のときは空集合から生成された部分群だから，0である

を生ずる．しかるに，一つの i に対し，十分大きな j をとれば $P^{(i)}\cap p^jG=0$ であるから，$P_j{}^{(i)}=P\cap P^{(i)}\cap p^jG=0$ となり，(3·6) は有限列と見なすことができる．よって，3·1 節の命題8により，(3·6) は主基 $\mathfrak{a}^{(i)}$ を有する．さらに，同じ命題により，$i=0,1,\cdots$ として，昇列

$$\mathfrak{a}^{(0)}\subseteq\mathfrak{a}^{(1)}\subseteq\mathfrak{a}^{(2)}\subseteq\cdots$$

を順次作って行くことができ，その和集合を $\mathfrak{a}$ とすれば，3·1 節の命題7により，$\mathfrak{a}$ は $P_0\supseteq P_1\supseteq\cdots$ の主基，すなわち G の主基となる．一方，$P=\cup_i P^{(i)}$ で，$P^{(i)}$ が有限高度であることから，$p^\omega G=0$ である．ゆえに定理2から，G は巡回群の直和である． ▌

プリューファーの定理　可算 p-群 G が巡回群の直和となるための条件は，$p^\omega G=0$ なることである．

証明　G が可算 p-群で，かつ $p^\omega G=0$ とすれば，G の台部分群 P を，その有限部分群 $P^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ の結びとして表わし，クリコフの定理を用いれば，G が巡回群の直和となることがわかる． ▌

問1　p-群 G が巡回群の直和となるための条件は，G が高度有界の部分群 $G^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ の可算昇列の結びとなることである．

問2　p-群 G が巡回群およびプリューファーの群の直和に分解されるための条件は，

$$G=(\cup_i G^{(i)})\cup p^\omega G$$

となることである．ここに $G^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ は G の高度有界部分群で，かつ可算昇列をなすものとする．

定理 3　群 G が巡回群の直和ならば，G の任意の部分群 H も巡回群の直和である．

証明　まず G を p-群とする．仮定により，G の台部分群 P は，G での高度有界な部分群 $P^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ の可算昇列の結びとなる．$P\cap H$ は H の台部分群で，$P^{(i)}\cap H$ の可算昇列の結びとなる．$P^{(i)}\cap H$ は，G で高度有界だから，H でもそうである．よってクリコフの定理により H は巡回群の直和である．つぎに，G がねじれ群で，p-準素成分への分解を $G=\sum_p G_p$ とすると，$H=\sum_p(H\cap G_p)$ である．上述のように $H\cap G_p$ が巡回群の直和となるから，H もそうである．最後に，G を任意の巡回群の直和とし，T を G の最大ねじれ部分群とすると，$H\cap T$ は H の最大ねじれ部分群で，

$$H/(H\cap T)\cong(H\cup T)/T$$

は自由群 G/T のある部分群に同型だから，2·4 節の定理1により自由群である．したがって，$H/(H\cap T)$ は巡回群の直和で，かつねじれのない群だから，$H\cap T$ は H の純粋部分群である．ゆえに 2·8 節の命題4により，$H\cap T$ は H の直和因子である．すなわち，$H=H'+(H\cap T)$ で，$H'\cong H/(H\cap T)$ は自由群であり，$H\cap T$ はねじれ群でかつ巡回群の直和となる群の部分群だから，上述のように巡回群の直和となって，証明が完了する． ▌

定理 4 任意の群 G は，巡回群の直和となるような部分群の可算昇列の結びとなる．

証明 有理数の加法群は，巡回部分群の昇列

$$\{1\}\subset\left\{\frac{1}{2!}\right\}\subset\left\{\frac{1}{3!}\right\}\subset\cdots$$

の結びとなり，プリューファーの群も，2·4 節で述べた生成元から生成された部分群の昇列の結びに等しい．よって，任意の可除群は，巡回群の直和となる部分群の可算昇列の結びとなる．そこで，任意の群 G を可除群 D の中にはめこみ，定理3を用いればよい． ▌

定理 5 群 G が有限個の元から生成されるならば，G は有限個の巡回群の直和である．

証明 定理4により，G を巡回群の直和となるような部分群 $H^{(i)}$ の可算昇列の結びとすると，有限個の元から生成されることから，十分大きな i につき，$G=H^{(i)}$ となるからである．（有限個の巡回群の 直和となることのほうは，まず G を巡回群の直和に分解すると，G の生成団の元をその直和分解によって表示するとき，0 でないものが現われる直和因子（それは有限個）だけとっても，G はそれらの直和となるはずだからである．） ▌

定理5は周知であるし，その証明もひどくむつかしくはない．だからわれわれのやり方は遠まわりしすぎるようだけれども，定理4が全く任意のアーベル群に関する定理で，それから直ちに定理5が得られる点が，いわばミソなのである．

3·3 基部分群

p-群 G の部分群 B であって，次の3条件を満足するものを，G の**基部分群**

(basic subgroup) という.

（i） BはGの純粋部分群である.

（ii） Bは巡回群の直和である.

（iii） G/B は可除群である.

定理 1 任意の p-群Gは，基部分群を有する.

証明 A_0 をGの台部分群とし，$i\geqq 0$ につき，$A_i=A_0\cap p^iG$ とおいて，A_0 の部分群の可算降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$$

を作り，その相補的な基 $\mathfrak{a}$ をとる．$\mathfrak{a}=\vee_i\mathfrak{a}_i$ で，各 $\mathfrak{a}_i$ は A_i の A_{i+1} に対する相補的な基である．$\mathfrak{a}_i$ の各元aは高度 i で，$p^ib=a$ なるbを，各aに対し一つずつとり，その全体を $\mathfrak{b}_i$ とする．そして，和集合 $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_0\vee\mathfrak{b}_1\vee\cdots$から生成された$G$の部分群を$B$で表わす．3·1 節の命題4により$\mathfrak{a}$は独立だから，$\mathfrak{b}$ も独立で，Bは巡回群の直和である.

BはGの純粋部分群である．実際，$A_i'=\{\mathfrak{a}_i\}+\{\mathfrak{a}_{i+1}\}+\cdots(i\geqq 0)$ とおくと，3·1 節の命題6により，$A_i'=A_0'\cap A_i=A_0'\cap A_0\cap p^iG=A_0'\cap p^iG$ で，かつ $\mathfrak{a}$ は

$$A_0'\supseteq A_1'\supseteq A_2'\supseteq\cdots$$

の主基である．さらに，$A_0'\cap p^\omega G=0$ である．何故なら，$A_0'\cap p^\omega G$ が 0 でない元 a をもてば，$\mathfrak{a}$ は A_0' の基だから，aをこの基で表わすことにより，十分大きなkに対し，$a\notin A_k'$ なることがわかる．しかし $a\in A_0'\cap p^\omega G\subseteq A_0'\cap p^kG=A_k'$ で，これは矛盾である．かくて $A_0'\cap p^\omega G=0$ が得られたから，3·2 節の命題3により，BはGの純粋部分群である.

最後に，G/B は可除群である．これをいうには，G/B が p-群だから，Gの任意の元gが，$g=ph+b$ $(h\in G,\ b\in B)$ と表わされることをいえばよい．まず,g が位数 $p^0=1$ とすると，明らかに正しい．そこでgの位数を p^n $(n>0)$ とし，位数が高々 p^{n-1} の元ではすでに証されたとする．$p^{n-1}g$ は位数pで，かつ $p^{n-1}G$ の元だから，A_{n-1} の元であり，3·1 節の命題3により，$\mathfrak{a}_{n-1}$ の元の1次結合と A_n の元の和として表わされる．ゆえに,

$$p^{n-1}g=p^{n-1}b+p^nh \qquad (b\in B,\ h\in G)$$

の形となり，移項して

$$p^{n-1}(g-ph-b)=0$$

だから，帰納法の仮定により，

$$g-ph-b=ph'+b' \qquad (h'\in G,\ b'\in B)$$

で，

$$g=p(h+h')+(b+b')$$

が得られる．▮

命題 1 p-群 G の任意の基部分群 B の一つの基を $\mathfrak{b}$ とし，$\mathfrak{b}$ の元中位数が p^{i+1} のもの全体を $\mathfrak{b}_i$ $(i\geqq 0)$ とすれば，$\mathfrak{a}_i=p^i\mathfrak{b}_i$ の和集合 $\mathfrak{a}=\vee_i\mathfrak{a}_i$ は，$A_i=A_0\cap p^iG$ ($i\geqq 0$ で A_0 は G の台部分群) による A_0 の可算降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$$

の相補的な基である．

証明 各 $i\geqq 0$ につき，$\mathfrak{a}_i$ が A_i の A_{i+1} に対する相補的な基になることをいえばよい．まず，$\mathfrak{b}_i$ が独立だから $\mathfrak{a}_i$ も独立である．そして，$\mathfrak{a}_i$ の元の 1 次結合となる元 $a\neq 0$ は，A_{i+1} には含まれない．実際，a は群 B では明らかに高度 i で，B が G の純粋部分群なることから，a は G でも高度 i で，$A_{i+1}=A_0\cap p^{i+1}G$ には含まれぬのである．さらに，A_i の任意の元 g が，$\mathfrak{a}_i$ の元の 1 次結合と A_{i+1} の元の和として表わされることを示そう．$g=p^ig'$ なる $g'\in G$ をとり，G/B は可除群だから，$g'=ph+b$ $(h\in G,\ b\in B)$ とすると，

$$g=p^ib+p^{i+1}h$$

となるが，b を $\mathfrak{b}$ の元で表わすと，$\mathfrak{b}_0,\cdots,\mathfrak{b}_{i-1}$ までで表わした部分は p^i 倍して 0 になるから，

$$g=a+p^ib'+p^{i+1}h$$

の形となり，ここに a は $\mathfrak{a}_i$ の元の 1 次結合，b' は $\mathfrak{b}_{i+1}\vee\mathfrak{b}_{i+2}\vee\cdots$ の元の 1 次結合である．g も a も A_0 の元だから，$p^{i+1}b'=-p^{i+2}h$ である．そして，$\mathfrak{b}_{i+1}\vee\cdots$ の元はみな位数が p^{i+2} 以上で，b' はその 1 次結合だから，b' が B で高度 0 ならば，b' を $\mathfrak{b}_{i+1}\vee\cdots$ で表わしたときの係数に p でわれぬものがあるはずで，したがって $p^{i+1}b'\neq 0$ であり，かつ $p^{i+1}b'$ の B での高度はちょうど $i+1$ である．これは $p^{i+1}b'=-p^{i+2}h$ と，B が G の純粋部分群なることに矛盾する．ゆえに b' の B での高度は 1 以上で，$b'=pb''(b''\in B)$ と表わされ，

$$g=a+p^{i+1}(b''+h)$$

が得られる．$g-a \in A_0$ だから，$p^{i+1}(b''+h) \in A_{i+1}$ で，証明が完了する．▌

命題 2 p-群Gの任意の基部分群Bの基 $\mathfrak{b}$ において，位数 p^{i+1} の元全体を $\mathfrak{b}_i$ $(i \geqq 0)$ とすれば，$\mathfrak{b}_i$ の濃度は $r(A_i/A_{i+1})$ に等しい．ここに $A_j = A_0 \cap p^j G$ で，A_0 はGの台部分群である．

証明 前命題の $\mathfrak{a}_i$ は $\mathfrak{b}_i$ と濃度が等しいから，3·1 節の命題2から直ちに得られる．▌

定理 2 p-群 G の基部分群は，同型なものを同一視して，G から一意的に定まる．

証明 命題2から明らかである．▌

命題 3 p-群 G の基部分群をBとすると，任意の整数 $i \geqq 0$ につき，$G = B \cup p^i G$ である．

証明 G の任意の元を g とすると，G/B が可除群だから，$g = p^i g' + b(g' \in G, b \in B)$ と表わすことができ，$g \in B \cup p^i G$ となる．▌

命題 4 （同じ仮定の下に）$p^i G/p^i B \cong G/B$ である．

証明 BがGの純粋部分群なることと前命題とを用いて，

$$p^i G/p^i B = p^i G/(p^i G \cap B) \cong (p^i G \cup B)/B = G/B$$

が得られる．▌

命題 5 （同じ仮定の下に）$p^i B$ は $p^i G$ の純粋部分群である．

証明 任意の整数 $j \geqq 0$ につき，

$$p^{j+i} B = p^i B \cap p^{j+i} G$$

なることをいえばよい．B が G の純粋部分群なることを用いて，右辺$=(B \cap p^i G) \cap p^{j+i} G = B \cap p^{j+i} G = p^{j+i} B$ となる．▌

命題 6 （同じ仮定の下に）$p^i B$ は $p^i G$ の基部分群である．

証明 $p^i B$ が巡回群の直和なることは明らかだから，前2命題から直ちに得られる．▌

命題 7 p-群 G の基部分群をBとし，Bの基部分群を B^* とすれば，B^* はGの基部分群である．

証明 純粋部分群の純粋部分群は純粋部分群だから，B^* はG の純粋部分群で，またもちろん巡回群の直和である．さらに，B/B^* と

$$\frac{G/B^*}{B/B^*}\cong G/B$$

がともに可除群だから，2·5 節の命題2により，G/B^* は可除群である． ▮

定理 3 p-群Gの基部分群をBとすれば，$p^\omega G=G^1$ に対し，$\bar{B}=(B\cup G^1)/G^1$ は G/G^1 の基部分群で，かつ $B\cong\bar{B}$ である．

証明 Bの0でない元はBで有限高度で，かつBはGの純粋部分群だから，$B\cap G^1=0$ である．したがって，

$$\bar{B}=(B\cup G^1)/G^1\cong B/(B\cap G^1)=B/0\cong B$$

となる．ゆえに $\bar{B}$ は巡回群の直和である．

$\bar{B}$ は $\bar{G}=G/G^1$ の純粋部分群である．何故なら，$B\cup G^1$ の元 $b+g(b\in B,\ g\in G^1)$ が，$b+g=p^nh+g'(h\in G,\ g'\in G^1)$ と表わせたとすると，g と g' は G^1 の元として，ともにGの元の p^n 倍になるから，$b=p^nh'(h'\in G)$ と表わされ，B が G の純粋部分群だから，$b=p^nb'(b'\in B)$ となる．ゆえに，$b+g=p^nb'+g(b'\in B\cup G^1,\ g\in G^1)$ と書かれるのである．

さらに，

$$\bar{G}/\bar{B}\cong\frac{G/G^1}{(B\cup G^1)/G^1}\cong G/(B\cup G^1)$$

で，$B\cup G^1\supseteq B$ だから，$\bar{G}/\bar{B}$ は可除群 G/B に準同型で，やはり可除群となる． ▮

定理 4 任意の p-群Gの任意の基部分群Bに含まれていて，階数について

$$r(G/B^*)=\min_{n<\omega}[r(p^nG)] \tag{3·7}$$

を満足するGの基部分群 B^* が存在する．

補題 1 群Bが巡回 p-群の直和で，各自然数nにつき，Bの位数 $\geqq p^n$ の直和因子の濃度が，n に無関係な一定無限濃度 $\mathfrak{p}$ 以上であるならば，$B=\sum_{\mu\in M}H_\mu$（M は濃度 $\mathfrak{p}$ の添数集合で，各 H_μ は非有界な巡回群の直和）と直和分解される．

証明 Bの各直和因子からそれぞれ一つの生成元をとり，位数 p^m のもの全体を $\mathfrak{b}_m$ として，その濃度を $\mathfrak{p}_m$ とすれば（$m\geqq1$），仮定により，

$$\mathfrak{p}_m+\mathfrak{p}_{m+1}+\cdots\geqq\mathfrak{p} \tag{3·8}$$

である．$\mathfrak{p}_m$ の中に無限濃度が無限回現われるものとし，$\mathfrak{p}_{m_1},\ \mathfrak{p}_{m_2},\ \cdots(m_1<m_2$

$<\cdots)$ がいずれも無限濃度とすれば，

$$\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{m_1}=\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{m_1+1}+\cdots+\mathfrak{p}_{m_2}=\mathfrak{p}_2',\cdots$$

とおくと，$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \cdots$ はみな無限濃度で，かつ任意自然数 m につき，

$$\mathfrak{p}_m'+\mathfrak{p}_{m+1}'+\cdots\geqq\mathfrak{p}$$

である．$\mathfrak{b}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{b}_{m_1}=\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{b}_{m_1+1}\vee\cdots\vee\mathfrak{b}_{m_2}=\mathfrak{b}_2', \cdots$ とし，$\mathfrak{p}_m'(m\geqq1)$ が無限濃度なることから，$\mathfrak{p}_m'=\aleph_0\mathfrak{p}_m'$ で，各 $\mathfrak{b}_m'$ を濃度 $\mathfrak{p}_m'$ の可算無限個の類にわけることができる．それを $\mathfrak{b}_m'=\mathfrak{b}_{m1}'\vee\mathfrak{b}_{m2}'\vee\cdots$ とすれば，各 k につき

$$|\mathfrak{b}'_{mk}|+|\mathfrak{p}'_{m+1,k}|+\cdots\geqq\mathfrak{p}$$

となる．そこで，各自然数 k に対し，$\mathfrak{b}'_{kk}\vee\mathfrak{b}'_{k+1,k}\vee\cdots$ から濃度 $\mathfrak{p}$ の部分集合 $\mathfrak{b}_k''$ をとると，ことなる k については共通元がないから，$\mathfrak{b}_1''$ から各 $\mathfrak{b}_k''$ の上への一定の一対一写像をとり，同じ $\mathfrak{b}_1''$ の元の像となるものを（すべての k に対し）集めて得られる集合は，全部で $\mathfrak{p}$ だけあるわけだから，添数集合 M（その濃度が $\mathfrak{p}$）を用いて，$\mathfrak{c}_\mu$ $(\mu\in M)$ の形に表わせる．各 $\mathfrak{c}_\mu$ は，各 $\mathfrak{b}_k''$ から一つずつとって得られるから，その元の位数は非有界である．($\mathfrak{b}_k''$ は $\mathfrak{b}_k'\vee\mathfrak{b}'_{k+1}\vee\cdots$ に含まれるから，k を大きくすれば，位数がいくらでも大きくなる．）これら $\mathfrak{c}_\mu$ は $\mathfrak{b}_1'\vee\mathfrak{b}_2'\vee\cdots=\mathfrak{b}_1\vee\mathfrak{b}_2\vee\cdots$ のある部分集合で，のこりのものも適当にどれか $\mathfrak{c}_\mu$ に加えることにより，題意のような B の直和分解が得られる．

また，$\mathfrak{p}_m$ の中に無限濃度が高々有限回しか現われなければ，あるところから先は $\mathfrak{p}_m$ は有限となり，(3·8) から $\mathfrak{p}=\aleph_0$ となる．このとき，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots$ の中で 0 でないものを $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \cdots$ とし，これに対応する $\mathfrak{b}_m$ を $\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2', \cdots$ とする．一方，自然数全体の集合 N を，$\aleph_0=\aleph_0\aleph_0$ により，可算無限個の可算無限集合に類別したものを，$N_1, N_2, \cdots$ とし，$\vee_{i\in N_k}\mathfrak{b}_i'=\mathfrak{c}_k$ $(k=1,2,\cdots)$ とおけば，各 $\mathfrak{c}_k$ の元の位数は非有界で，$\mathfrak{b}_1\vee\mathfrak{b}_2\vee\cdots=\mathfrak{b}_1'\vee\mathfrak{b}_2'\vee\cdots=\mathfrak{c}_1\vee\mathfrak{c}_2\vee\cdots$ だから，$\mathfrak{c}_k$ により B の求める分解が得られる．▌

補題 2 p-群 H が巡回群の直和で，かつ非有界とすれば，H 自身とことなる基部分群 B を有する．

証明 H の台部分群を P とする．H の基 $\mathfrak{a}$ において，位数 p^{i+1} $(i\geqq0)$ のもの全体を $\mathfrak{a}_i$ とし，$p^i\mathfrak{a}_i=\mathfrak{b}_i$ とする．そして，$\mathfrak{a}$ の元の位数として実際に現われる数を，$p^{m_0+1}<p^{m_1+1}<\cdots$ とすると，$\mathfrak{b}_0\vee\mathfrak{b}_1\vee\cdots=\mathfrak{b}_{m_0}\vee\mathfrak{b}_{m_1}\vee\cdots$ であり，各 $\mathfrak{b}_{m_j}$ は空でない．各 $j\geqq0$ につき，$\mathfrak{b}_{m_j}$ から一つずつ元 b_j をとる．そし

て，各 $\mathfrak{b}_{m_j}$ の元のうち b_j だけを b_j+b_{j+1} にかえ，他はそのままにしたものを $\mathfrak{b}_{m_j}'$ とすると，$\mathfrak{b}_{m_j}'$ は $\mathfrak{b}_{m_j}$ と同様に，P_{m_j} の $P_{m_{j+1}}$ に対する相補的な基となる．（一般に $P_k=P\cap p^kG$ とする．）したがって，定理1の証明と同様にして，$\mathfrak{b}_{m_0}'\vee\mathfrak{b}_{m_1}'\vee\cdots=\mathfrak{b}'$ からHの基部分群Bが得られる．しかし $H\neq B$ である．何故なら，$\mathfrak{b}'$ はPを生成しない．実際，Pの元 b_0 は，

$$b_0+b_1,\ \ b_1+b_2, \cdots$$

の1次結合としては表わされないからである． ▮

定理の証明 群Gの基部分群Bが有界とすると，BはGの純粋部分群だから，2·8 節の定理2により，$G=B+D$ となり，$D\cong G/B$ は可除群である．よって $p^mB=0$ とすると，$k\geqq m$ につき $p^kG=D$ で，(3·7) の右辺を $r'(G)$ で表わすなら，

$$r'(G)=r(D)=r(G/B)$$

で，B自身が求めるものである．

次に，Bが非有界とする．すると，任意の整数 $n\geqq 0$ についても p^nB は非有界で，したがって $r(p^nB)$ は無限濃度である． ゆえに $r(p^nG)$ もそうで，$\mathfrak{p}=r'(G)$ が無限濃度なることがわかる．

さて，2·8 節の命題5と，本節の命題4，命題5により，任意の整数 $n\geqq 0$ につき，

$$r(G/B)=r(p^nG/p^nB)\leqq r(p^nG)$$

だから，$r(G/B)\leqq \mathfrak{p}=r'(G)$ である．等号が成立すれば，$B^*=B$ とおけばよい．等号が成立しないとすると，任意の整数 $n\geqq 0$ につき，

$$r(p^nG/p^nB)=r(G/B)<\mathfrak{p}\leqq r(p^nG) \tag{3·9}$$

となり，$r(p^nB)$ は無限濃度だから，

$$r(p^nB)=r(p^nG) \tag{3·10}$$

が得られる．何故なら，$r(p^nB)<r(p^nG)$ とすると，2·7 節の命題5により，

$$r(p^nG)\leqq r(p^nG/p^nB)+r(p^nB)$$

で，右辺は，$r(p^nB)$ が無限濃度なることを用いて，$\max[r(p^nG/p^nB),\ r(p^nB)]$ に等しい．ゆえにこの max は $r(p^nG/p^nB)$ でなければならぬが，それは (3·9) と矛盾するのである．

そこで，(3·10) により，Bの巡回直和因子の中で，位数$>p^n$ のものが（各

$n \geqq 0$ につき）少なくとも $\mathfrak{p}=r'(G)$ だけあることがわかる．よって補題1により，$B=\sum_{\mu\in M}H_\mu$（M は濃度 $\mathfrak{p}$ の添数集合で，各 H_μ は非有界な巡回群の直和）と分解することができる．さらに，補題2により，各 H_μ の基部分群 B_μ を，$B_\mu \neq H_\mu$ なる如くとることができる．B_μ の直和を B^* とすれば，もちろん巡回群の直和であり，かつ B の純粋部分群である．そして，剰余群 B/B^* は H_μ/B_μ の制限直和と同型だから，可除群である．よって B^* は B の基部分群で，命題7により G の基部分群となる．この B^* は (3・7) を満足する．実際，

$$r(G/B^*) \geqq r(B/B^*)=\sum_{\mu\in M} r(H_\mu/B_\mu) \geqq \mathfrak{p}$$

で，一方 $r(G/B^*) \leqq \mathfrak{p}$ だから，等号が成り立つのである．∎

p-群 G の基部分群 B の基を $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ とする．G/B は可除 p-群だから，プリューファーの群 $C(p^\infty)$ の直和で，$G/B=\sum_{\mu\in M}C_\mu{}^*$ と分解される．各 $C_\mu{}^*$ において，2・4 節で述べた生成団 $c_\mu{}^{(1)*}, c_\mu{}^{(2)*}, \cdots$ をとる．したがって，

$$pc_\mu{}^{(1)*}=0^*,\quad c_\mu{}^{(1)*}-pc_\mu{}^{(2)*}=0, \cdots$$

である．B は G の純粋部分群だから，2・8 節の定理1により，各 $c_\mu{}^{(n)*}$ から同じ位数の G の元 $c_\mu{}^{(n)}$ をとることができる．すると，

$$pc_\mu{}^{(1)}=0,\quad c_\mu{}^{(n)}-pc_\mu{}^{(n+1)}=b_\mu{}^{(n)} \quad (b_\mu{}^{(n)} \in B,\ n\geqq 1)$$

で，各 $c_\mu{}^{(n)}$ は位数 p^n だから，$b_\mu{}^{(n)}$ は位数高々 p^n で，かつ

$$pc_\mu{}^{(1)}=p^2c_\mu{}^{(2)}=\cdots=p^nc_\mu{}^{(n)}=\cdots=0 \tag{3・11}$$

である．これらすべての a_λ ($\lambda\in\Lambda$) と $c_\mu{}^{(n)}$ ($\mu\in M$, $n\geqq 1$) の全体は，G の生成団で，G の**準基** (quasibasis) という．G の任意の元 g は，

$$g=k_1a_{\lambda_1}+\cdots+k_ra_{\lambda_r}+l_1c_{\mu_1}^{(n_1)}+\cdots+l_sc_{\mu_s}^{(n_s)}$$

の形に，かつ一意的に表わされる．ここに k_i, l_j は整数で，k_i は $0<k_i<O(a_{\lambda_i})$，l_j は $0<l_j<p^{n_j}$ と $p \nmid l_j$ を満足し，一意的とは，各 $\lambda_i \in \Lambda$ につき，$k_ia_{\lambda_i}$ が現われるかどうかと，現われるとき k_i が一意的に定まり，また各 $\mu_j \in M$ につき，$l_jc_{\mu_j}^{(n_j)}$ が現われるかどうかと，現われるとき l_j と n_j が一意的に定まる，ということをいう．

定理 5　G が被約 p-群で，B をその基部分群とすると，

$$|G| \leqq |B|^{\aleph_0} \tag{3・12}$$

証明　B が有限群ならば，有界だから，前定理の証明におけると同様，$G=B+D$（D は可除群）となり，被約性から，$D=0$ となって，$G=B$ は有限群

だから，(3·12) が成り立つ．よって B は無限群とする．G の準基 $[a_\lambda, c_\mu^{(n)}]_{\lambda\in\Lambda, \mu\in M, n\geqq 1}$ をとると，少なくとも a_λ のほうは無限集合だから，1·1 節の問 2 により，この準基の濃度は G のそれに等しい．そして，準基の濃度は $|B|+\aleph_0|M|$ だから，$|M|\leqq|B|^{\aleph_0}$ が証明されれば，(3·12) が導かれることになる．

各 $\mu\in M$ につき，

$$c_\mu^{(n)}-pc_\mu^{(n+1)}=b_\mu^{(n)} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とすると，$b_\mu^{(n)}\in B$ である．今，ことなる μ, ν に対し，$b_\mu^{(n)}=b_\nu^{(n)}$ $(n=1, 2,\cdots)$ とすると，

$$c_\mu^{(1)}-c_\nu^{(1)}=p(c_\mu^{(2)}-c_\nu^{(2)}),\ \ c_\mu^{(2)}-c_\nu^{(2)}=p(c_\mu^{(3)}-c_\nu^{(3)}),\cdots$$

となり，G が被約群なることから，$c_\mu^{(n)}=c_\nu^{(n)}$ $(n=1, 2,\cdots)$ となる．これは $\mu\neq\nu$ に反する．よって M の濃度は，B の元の可算列 $b_\mu^{(1)}, b_\mu^{(2)},\cdots$ の濃度をこえない．すなわち，$|B|^{\aleph_0}$ をこえない．∎

系 被約 p-群 G と $G/G^1=\bar{G}$ $(G^1=p^\omega G)$ につき，

$$|G|\leqq|\bar{G}|^{\aleph_0}$$

証明 G の基部分群 B に対し，$|G|\leqq|B|^{\aleph_0}$ であるが，$B\cong\bar{B}=(B\cup G^1)/G^1$ (定理 3) で，もちろん $|\bar{B}|\leqq|\bar{G}|$ だからである．∎

第4章　超限的操作

アーベル群論の最も深い諸結果は，超限的操作，すなわち，任意の超限順序数αに対し，p-群 G からその部分群 $p^{\alpha}G$ を作るという操作により，始めて得られるのである．(ねじれのない群でも，この操作は重要であるが，本書ではとりあつかわない．）本章ではその概要を述べ，第5，第6章の準備とする．

4·1 節では，まず部分群 $p^{\alpha}G$ の定義と諸性質を述べ，また超限的高度の概念を定義する．4·2 節では，ウルム不変数列と超限的主基について解説し，両者の関連を示す．4·3 節では，ウルム不変数列よりも精密な，ウルム列の概念を導入する．可算群の場合ウルム不変数列を考えれば十分であるが，一般群では，とくに第6章において，ウルム列が必要となるのである．

4·1　部分群 $p^{\alpha}G$

pを一つの素数とし，本章ではすべてこの固定した素数pを基礎にして考えることにする．

群Gに対して，負ならざる整数nに関する部分群 p^nG は，すでに第2章で定義し，Gの元aの高度という概念も導入した．

これを拡張して，任意の順序数αに対し，Gの部分群 $p^{\alpha}G$ をつぎのように定義するのである．まず $p^0G=G$ とし，順序数 $\alpha>0$ に対し，$\beta<\alpha$ なるすべての順序数βについて，$p^{\beta}G$ がすでに定義されているものとしよう．このとき，もし $\alpha-1$ が存在すれば，$p^{\alpha}G=p(p^{\alpha-1}G)$ と定義し，α が極限数ならば，$p^{\alpha}G=\bigcap_{\beta<\alpha}p^{\beta}G$ と定義する．すると，明らかに $p^{\alpha}G$ はGの部分群である．

問1　部分群の列 $[p^{\alpha}G]_{\alpha}$ は単調減少列である．すなわち，$\alpha<\alpha'$ ならば $p^{\alpha}G\supseteq p^{\alpha'}G$ である．

問2　ある順序数αにつき，$p^{\alpha+1}G=p^{\alpha}G$ ならば，$\alpha'\geqq\alpha$ なる任意の α' についても，$p^{\alpha'}G=p^{\alpha}G$ である．

命題 1　$\beta\leqq\alpha$ とすれば，

$$p^{\beta}G/p^{\alpha}G=p^{\beta}(G/p^{\alpha}G)$$

証明　$\beta=0$ なら正しいから，$\beta>0$ とし，β より小さい順序数ではすでに

証されたとする．もし $\beta-1$ が存在すれば，$\beta-1<\alpha$ だから，2·1 節の命題 1を用いて，

$$p^{\beta}G/p^{\alpha}G=p(p^{\beta-1}G)/p^{\alpha}G=p(p^{\beta-1}G/p^{\alpha}G)$$
$$=p(p^{\beta-1}(G/p^{\alpha}G))=p^{\beta}(G/p^{\alpha}G)$$

となり，また β が極限数ならば，

$$(\cap_{\nu<\beta}p^{\nu}G)/p^{\alpha}G=\cap_{\nu<\beta}(p^{\nu}G/p^{\alpha}G)$$
$$=\cap_{\nu<\beta}p^{\nu}(G/p^{\alpha}G)=p^{\beta}(G/p^{\alpha}G)$$

となるのである． ▌

次に，群 G の部分群を H とすれば，任意の順序数 α に対し，$p^{\alpha}G\supseteq p^{\alpha}H$ となることは，やはり α に関する超限帰納法により，容易に示される．

命題 2　$G=\sum_{\mu\in M}G_{\mu}$ とすれば，任意の順序数 α に対し，

$$p^{\alpha}G=\sum_{\mu\in M}p^{\alpha}G_{\mu}$$

証明　$\alpha=0$ なら明らかだから，$\alpha>0$ とし，α より小さい順序数ではすでに証されたとする．もし $\alpha-1$ が存在すれば，これについての命題から，2·1 節の命題 2 を用いて直ちに上式が得られる．α が極限数の場合，$p^{\alpha}G_{\mu}\subseteq G_{\mu}$ だから，$[p^{\alpha}G_{\mu}]_{\mu\in M}$ の独立性は明らかで，$p^{\alpha}G\subseteq\cup_{\mu\in M}p^{\alpha}G_{\mu}$ をいえばよい．$g\in p^{\alpha}G$ を $g=\sum_{\mu}g_{\mu}$ $(g_{\mu}\in G_{\mu})$ と表わすと，任意の $\beta<\alpha$ に対し，$g\in p^{\beta}G=\sum_{\mu}p^{\beta}G_{\mu}$ により，$g_{\mu}\in p^{\beta}G_{\mu}$ となるから，$g_{\mu}\in p^{\alpha}G_{\mu}$ となって，証明が完了する． ▌

ふたたび G の部分群列 $[p^{\alpha}G]_{\alpha}$ へもどろう．十分大きな順序数 α をとれば，$p^{\alpha+1}G=p^{\alpha}G$ が成り立つ．何故なら，α の濃度*) を，G の濃度 $|G|$ より大きくとると，もし $p^{\alpha+1}G\neq p^{\alpha}G$ ならば，問 2 により，$\beta<\alpha$ なる任意の β についても $p^{\beta+1}G\neq p^{\beta}G$ である．したがって，$p^{\beta}G$ に含まれ，$p^{\beta+1}G$ に含まれぬ元 g_{β} がとれる．すると $[g_{\beta}]_{\beta<\alpha}$ はすべてことなる元よりなるから，その濃度は α の濃度に等しく，$|G|$ より大きくなって，矛盾である．

そこで，$p^{\alpha+1}G=p^{\alpha}G$ なる順序数 α 中最小のものを λ としよう．λ を群 G の（素数 p に関する）**長さ** (length) という．その特徴は，$p^{\lambda+1}G=p^{\lambda}G$ で，かつ $\alpha<\lambda$ ならば $p^{\alpha+1}G\neq p^{\alpha}G$ なることである．

今後本章においては，G は長さ λ の被約 p-群であるものとする．$p^{\lambda}G$ は可

---
*) α より小さい順序数全体の濃度．

除群であるから，0となる．したがって，差集合の列 $[p^\alpha G - p^{\alpha+1}G]_{0\leqq\alpha<\lambda}$*) により，$G-0$ を類別できて，任意の（0ならざる）Gの元xに対し，$x\in p^\alpha G$, $x\notin p^{\alpha+1}G$ なる順序数 α $(0\leqq\alpha<\lambda)$ が一意的に定まる．このαを $H(x)$ と書き，x の G における**超限的高度**という．第2章で定義した高度のうち，∞ をさらに精密化したものと見ることができる．また，G の零元0に対しては，$H(0)=\lambda+1$ と規約する．この $H(0)$ の規約により，Gの0でない元xに対しては，常に $H(x)+1<H(0)$ となるわけである．

命題 3 超限的高度 $H(x)$ は次の3性質を有する．

(i) $H(x)<H(y)$ ならば $H(x+y)=H(x)$

(ii) $H(x)=H(y)$ ならば $H(x+y)\geqq H(x)$

(iii) $x\neq 0$ ならば $H(px)>H(x)$

証明 $H(x)=\alpha$, $H(y)=\beta$, $\alpha\leqq\beta$ とすると，$x\in p^\alpha G$, $y\in p^\beta G\subseteq p^\alpha G$ だから，$x+y\in p^\alpha G$ で，$H(x+y)\geqq\alpha$ である．よって (ii) が成り立つ．とくに $\alpha<\beta$ とし，もし $H(x+y)>\alpha$ と仮定すると，$x+y\in p^{\alpha+1}G, y\in p^\beta G\subseteq p^{\alpha+1}G$ であるから，$x\in p^{\alpha+1}G$ となり，$H(x)=\alpha$ に反する．ゆえに $H(x+y)=\alpha$ である．最後に，(iii) の証明は，px が0か0でないか，わけて行なう必要があるが，0の場合は前述の注意を用い，容易に証明される． ▌

問 3 $H(x)>\alpha$ ならば，$px'=x$, $H(x')\geqq\alpha$ なる元 $x'\in G$ がとれる．

問 4 $x\neq 0$ で，$H(x)=\alpha+1$ ならば，$px'=x, H(x')=\alpha$ なる $x'\in G$ がとれる．

4・2 ウルム不変数列と超限的主基

長さλの被約 p-群Gをとる．Gの台部分群Pと任意の順序数αに対し，剰余群 $(P\cap p^\alpha G)/(P\cap p^{\alpha+1}G)$ の階数を $U_G(\alpha)$ で表わし，G の α 番目の**ウルム不変数** (Ulm invariant) といい，すべての α に対するこれら階数の列 $[U_G(\alpha)]_\alpha$ を，Gの**ウルム不変数列**という．$\alpha\geqq\lambda$ に対しては，$U_G(\alpha)=0$ となるわけである．

命題 1 被約 p-群Gの長さがλならば，$\alpha<\lambda$ なる任意の順序数αに対し，$U_G(\alpha+n)\neq 0$ なる有限順序数nが存在する．

証明 $\alpha<\lambda$ であるから，$p^\alpha G\neq p^{\alpha+1}G$ で，$p^\alpha G$ に含まれるが $p^{\alpha+1}G$ には

*) $p^\alpha G$ に属するが $p^{\alpha+1}G$ に属さぬ元の全体．

含まれない元xがとれる．整数 $n\geqq 0$ を，$p^{n+1}x\in p^{\alpha+n+2}G$ なる如き最小数にとる．（nを十分大きくすれば，$p^{n+1}x=0$ だから，もちろん $p^{\alpha+n+2}G$ に含まれる.）すると，p^nx は $p^{\alpha+n+1}G$ に含まれず，$p^{n+1}x=p^{n+2}y$ $(y\in p^\alpha G)$ と表わせる．$z=p^n(x-py)$ は位数pの元で，$p^{\alpha+n}G$ には含まれるが，$p^{\alpha+n+1}G$ には含まれない．ゆえに，$P\cap p^{\alpha+n}G\neq P\cap p^{\alpha+n+1}G$ で，$U_G(\alpha+n)\neq 0$ なることがわかる． ▌

命題 2 $G=\sum_{\mu\in M}G_\mu$ ならば，任意順序数αに対し，

$$U_G(\alpha)=\sum_{\mu\in M}U_{G_\mu}(\alpha) \tag{4·1}$$

証明 前節命題2により，

$$p^\alpha G=\sum_\mu p^\alpha G_\mu,\quad p^{\alpha+1}G=\sum_\mu p^{\alpha+1}G_\mu$$

であるから，

$$P\cap p^\alpha G=\sum_\mu(P\cap p^\alpha G_\mu),\ \ P\cap p^{\alpha+1}G=\sum_\mu(P\cap p^{\alpha+1}G_\mu)$$

である．しかるに，一般に $A=\sum_\mu A_\mu$，$B=\sum_\mu B_\mu$，$A_\mu\supseteq B_\mu$ $(\mu\in M)$ ならば，A/B は A_μ/B_μ の制限直和と同型になる[*)]．したがって (4·1) が成り立つのである． ▌

やはり群Gは，被約 p-群とする．Gの台部分群をPとし，Pの部分群をAとする．各順序数 α に対し，$A_\alpha=A\cap p^\alpha G$ とおいて，Aの部分群の超限的降列

$$A_0\supseteq A_1\supseteq\cdots\supseteq A_\alpha\supseteq\cdots$$

が得られる．Aの部分集合$\mathfrak{a}$がこの降列の（あるいは簡単にAの）**超限的主基**であるとは，任意の順序数αに対し，$\mathfrak{a}\cap p^\alpha G$ が A_α の基になっていることである．とくにPの超限的主基のことを，Gの超限的主基という．そして，それが存在するとき，Gを**主基群**という．

命題 3 被約 p-群 G の台部分群 P の部分群 A が，その部分群の可算昇列 $A^{(0)}\subseteq A^{(1)}\subseteq\cdots$の結びで，各 $A^{(i)}$ が超限的主基 $\mathfrak{a}^{(i)}$ を有し，かつ $\mathfrak{a}^{(0)}\subseteq\mathfrak{a}^{(1)}\subseteq\cdots$ならば，その和集合 $\mathfrak{a}=\vee_i\mathfrak{a}^{(i)}$ はAの超限的主基である．

証明は3·1節の命題7のそれと同様である．

群Gの部分群Hの，Gでの超限的高度が高々有限種類しかないとき，すなわ

*) $a=\sum_\mu a_\mu$, $a'=\sum_\mu a'_\mu$ なるとき，$a\equiv a'(\mathrm{mod}\ B)$ なるための条件は，すべてのμにつき $a_\mu\equiv a'_\mu$ $(\mathrm{mod}\ B_\mu)$ なることを使えばよい．

ち．$H\cap p^{\alpha}G\neq H\cap p^{\alpha+1}G$ なる順序数αが高々有限個しかないとき，Hを**超限的高度有限型**という．

命題 4 被約 p-群 G の台部分群 P の部分群 A が，G で超限的高度有限型とすれば，A は超限的主基を有する．また，A の部分群 B の任意の超限的主基に，適当に元を加えて，A の超限的主基へと拡張することができる．

証明は 3·1 節の命題 8 のそれと同様である．

命題 5 被約 p-群 G の台部分群 P が，G で超限的高度有限型の部分群の可算昇列の結びとなるならば，G は主基群である．

証明は，命題 3 と命題 4 を用いてやればよい．この命題から，次の定理は直ちに得られる．

定理 1 可算な被約 p-群は主基群である．

命題 6 $G=\sum_{\mu\in M}G_{\mu}$ で，各 G_{μ} が超限的主基 $\mathfrak{a}_{\mu}$ を有すれば，和集合 $\vee_{\mu\in M}\mathfrak{a}_{\mu}$ は G の超限的主基である．

証明 G の台部分群 P と，任意の順序数 α に対し，

$$P\cap p^{\alpha}G=\sum_{\mu\in M}(P\cap p^{\alpha}G_{\mu})$$

である．仮定により，$\mathfrak{a}_{\mu}\cap p^{\alpha}G_{\mu}$ が $P\cap p^{\alpha}G_{\mu}$ の基であるから，その和集合 $\vee_{\mu\in M}(\mathfrak{a}_{\mu}\cap p^{\alpha}G_{\mu})$ は $P\cap p^{\alpha}G$ の基となる．そして明らかに，

$$\vee_{\mu}(\mathfrak{a}_{\mu}\cap p^{\alpha}G_{\mu})\subseteq(\vee_{\mu}\mathfrak{a}_{\mu})\cap p^{\alpha}G$$

であるが，右辺は $P\cap p^{\alpha}G$ に含まれ，かつ左辺から $P\cap p^{\alpha}G$ が生成されるから，右辺からも $P\cap p^{\alpha}G$ が生成される．しかるに，$\vee_{\mu}\mathfrak{a}_{\mu}$ は独立だから，右辺は独立で，ちょうど $P\cap p^{\alpha}G$ の基となる．すなわち，$\vee_{\mu}\mathfrak{a}_{\mu}$ は G の超限的主基である． ▌

定理 2 可算な被約 p-群の直和となる群は，主基群である．

これは，定理 1 と命題 6 から明らかである．

命題 7 被約 p-群 G が超限的主基 $\mathfrak{a}$ を有するとき，順序数 α に対し，$\mathfrak{a}$ の元で超限的高度 α のもの全体を $\mathfrak{a}_{\alpha}$ とすれば，その濃度 $|\mathfrak{a}_{\alpha}|$ はウルム不変数 $U_G(\alpha)$ に等しい．

証明 3·1 節におけると同様，$\mathfrak{a}_{\alpha}$ は $P\cap p^{\alpha}G$ の $P\cap p^{\alpha+1}G$ （P は G の台部分群）に対する相補的な基となるから，その濃度は $r((P\cap p^{\alpha}G)/(P\cap p^{\alpha+1}G))$ に等しいのである． ▌

なお，主基群の長さはΩ（最小非可算順序数）をこえず，また濃度の（順序数により添数づけられた）ある列が，一つの主基群のウルム不変数列となるための（必要十分）条件が明らかにされている（参考文献［6］参照）.

4・3 ウルム列

Gを長さλの被約 p-群とする．λは，$\lambda=\omega\tau_0+n$（nは有限順序数）の形に，かつ一意的に表わされる．$n>0$ のとき，$\tau=\tau_0+1$ とおき，$n=0$ のときは $\tau=\tau_0$ とおいて，このτを群Gの**ウルム型**（Ulm type）という．すると，λより小さい極限順序数γは，$\omega\alpha$（$0\leqq\alpha<\tau$）の形に表わされることになる．

任意の順序数αに対し，$p^{\omega\alpha}G=G^{\alpha}$ とおこう．αがτより小さければ，$G^{\alpha+1}\neq G^{\alpha}$ であるが，$\alpha\geqq\tau$ については，$G^{\alpha}=0$ となる．また，$G^0=G$ であり，$G^1=p^{\omega}G$ は，G で（2・1 節の意味での）無限高度の元全部のなす部分群である．一般に，各順序数 α に対し，$G^{\alpha+1}$ は G^{α} で無限高度の元全部のなす部分群である．そして，νが極限数のとき，$G^{\nu}=\cap_{\nu'<\nu}G^{\nu'}$ である．それゆえ，G^{α}をこのやり方で超限帰納法的に定義してもよいが，われわれはすでに $p^{\beta}G$ について知っているので，それから導いたのである．

各 α（$0\leqq\alpha<\tau$）に対し，$G^{\alpha}/G^{\alpha+1}=G_{\alpha}$ とおき，群Gのα番目の**ウルム因子**（Ulm factor）という．これらの列 $[G_{\alpha}]_{\alpha<\tau}$ を，群 G の**ウルム列**（Ulm sequence）という．

命題 1 各 $\alpha<\tau$ に対し，$H=G/G^{\alpha}$ のウルム列は，$[G_{\beta}]_{\beta<\alpha}$ である．

証明 $\beta<\alpha$ に対し，$\omega\beta<\omega\alpha$ で，4・1 節の命題1により，

$$p^{\omega\beta}G/p^{\omega\alpha}G=p^{\omega\beta}(G/p^{\omega\alpha}G)$$

であるから，$G^{\beta}/G^{\alpha}=(G/G^{\alpha})^{\beta}=H^{\beta}$ となる．したがって，

$$H_{\beta}=H^{\beta}/H^{\beta+1}=\frac{G^{\beta}/G^{\alpha}}{G^{\beta+1}/G^{\alpha}}\cong G^{\beta}/G^{\beta+1}=G_{\beta}$$

で，同型なものを同一視して，H のウルム列は $[G_{\beta}]_{\beta<\alpha}$ になるのである．▌

命題 2 各ウルム因子 G_{α}（$\alpha<\tau$）は，0 以外に無限高度の元を有さぬ p-群で，$\alpha=\tau-1$ 以外では非有界である[*)]．

証明 任意の整数 $n\geqq0$ に対し，

*) $\tau-1$ が存在するとき，$G_{\tau-1}$ は有界のことも非有界のこともある．

$$p^nG_\alpha=p^n(p^{\omega\alpha}G/p^{\omega(\alpha+1)}G)=p^{\omega\alpha+n}G/p^{\omega(\alpha+1)}G \qquad (4\cdot 2)$$

であるから，　$\cap_{n<\omega}p^nG_\alpha=\cap_{n<\omega}(p^{\omega\alpha+n}G/p^{\omega(\alpha+1)}G)=p^{\omega(\alpha+1)}G/p^{\omega(\alpha+1)}G$ すなわち零群となる．よって G_α は 0 以外に無限高度の元を有さない．また，α が $\tau-1$ でない場合，$\alpha+1<\tau$ だから，$G^{\alpha+1}=p^{\omega(\alpha+1)}G\neq 0$ で，群 G の長さ λ に対し，$\omega(\alpha+1)<\lambda$ である．したがって，任意の整数 $n\geqq 0$ に対し，$\omega\alpha+n<\lambda$ で，$p^{\omega\alpha+n}G\neq p^{\omega\alpha+n+1}G$ となる．ゆえに (4·2) により，p^nG_α ($n=0, 1,\cdots$) はすべてことなる．よって G_α は非有界となるのである．▌

命題 3　各 $\alpha<\tau$ につき，群 G_α の基部分群は，G^α の基部分群と同型で，その巡回直和因子のうち，位数 p^{n+1} のものの濃度は，$U_G(\omega\alpha+n)$ に等しい．

これは 3·3 節の命題 2 と定理 3 を，群 $G^\alpha=p^{\omega\alpha}G$ に適用すれば，直ちに得られる．

命題 4　二つの被約 p-群 G と H が同じウルム型 τ で，各 $\alpha<\tau$ につき，$G_\alpha\cong H_\alpha$ ならば，すべての順序数 β につき $U_G(\beta)=U_H(\beta)$ である．

これは前命題から明らかである．

補説　G を可算な被約 p-群としよう．各ウルム因子 G_α は，0 以外に無限高度の元のない可算 p-群だから，3·2 節のプリューファーの定理により，巡回群の直和であり，その基部分群と同型である*)．したがって，命題 3 により，ウルム不変数 $U_G(\alpha)$ 全部を与えれば，決定される．ゆえに，可算な被約 p-群では，命題 4 の逆も成立するわけである．

定理 1　ウルム型 τ の被約 p-群 G のウルム列 $[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$ において，各 G_α は 0 以外に無限高度の元をもたない p-群で，$\alpha=\tau-1$ の場合以外は非有界である．そして，次の 3 条件を満たす．

(i)　$\sum_{0\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|\leqq|G|\leqq\prod_{0\leqq\alpha<\min[\omega,\tau]}|G_\alpha|$

(ii)　$\sum_{\beta\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|\leqq|G_\beta|^{\aleph_0}$　$(0\leqq\beta<\tau)$

(iii)　$r(B_{\alpha+1})\leqq\min_{n<\omega}[r(p^nG_\alpha)]$　$(\alpha+1<\tau)$

ここに $B_{\alpha+1}$ は $G_{\alpha+1}$ の基部分群である．

証明　前半はすでに証されているから，後半だけ証明する．

G が有限群の場合，$G=0$ なら $\tau=0$，$G\neq 0$ なら $\tau=1$ で，(i)，(ii)，(iii) は明らかに成立する．よって，G は無限群であるものとしよう．

G は集合として $G^\alpha-G^{\alpha+1}$ $(0\leqq\alpha<\tau)$ 全体の和集合に 0 を加えたものだ

*) それ自身も一つの基部分群で，二つの基部分群は同型だから．

から*), $|G^\alpha - G^{\alpha+1}| \geqq |G^\alpha/G^{\alpha+1}| = |G_\alpha|$**) により（i）の左側の不等式が成り立つ．右側の不等式を証明するために，まずτが自然数nの場合は，

$$|G| = |G/G^1|\,|G^1/G^2| \cdots |G^{n-1}/G^n|$$
$$= |G_0||G_1| \cdots |G_{n-1}|$$

である．次に，$\tau \geqq \omega$ とし，$\min_{k<\omega}[|G_k|] = |G_s|$ とすると，$|G| = |G/G^s||G^s| = |G_0||G_1| \cdots |G_{s-1}||G^s|$ である．3·3 節の定理5の系を G^s に適用して，

$$|G^s| \leqq |G_s|^{\aleph_0} \leqq |G_s||G_{s+1}| \cdots$$

を得るから，$|G| \leqq \Pi_{0 \leqq \alpha < \omega} |G_\alpha|$ となる．

次に，同じ系を G^β に適用して，かつ（i）を用いれば

$$\textstyle\sum_{\beta \leqq \alpha < \tau} |G_\alpha| \leqq |G^\beta| \leqq |G_\beta|^{\aleph_0}$$

すなわち（ii）が得られた．

最後に，（iii）を証明しよう．$\alpha+1<\tau$ とし，3·3 節の定理3により，$G^{\alpha+1}$ の基部分群 $A_{\alpha+1}$ は，$G_{\alpha+1}$ の基部分群 $B_{\alpha+1}$ と同型である．$A_{\alpha+1}$ の基 $[a_{\alpha+1,\lambda}]_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．G^α と $G^{\alpha+1}$ との関係から，任意の整数 $n \geqq 0$ に対し，$p^n x_\lambda^{(n)} = a_{\alpha+1,\lambda}$ なる $x_\lambda^{(n)} \in G^\alpha$ がとれる．すると，$\mu \neq \mu'$ ならば，

$$p^n x_\lambda^{(n+1)} \not\equiv p^n x_{\mu'}^{(n+1)} (\bmod G^{\alpha+1})$$

なることを示そう．$p^n x_\mu^{(n+1)} - p^n x_{\mu'}^{(n+1)} = g \in G^{\alpha+1}$ とすれば，p 倍して $a_{\alpha+1,\mu} - a_{\alpha+1,\mu'} = pg$ となる．これは $A_{\alpha+1}$ の元で，$A_{\alpha+1}$ は $G^{\alpha+1}$ の純粋部分群だから，$a_{\alpha+1,\mu} - a_{\alpha+1,\mu'}$ が $A_{\alpha+1}$ の中である元の p 倍の形に書かれねばならないが，$\mu \neq \mu'$ であるから，かかることはない．

ゆえに，$G^\alpha/G^{\alpha+1}$ には，（上記 $p^n x_\mu^{(n+1)}$ の属する剰余類によって）高度がn以上で，互いに異なる元が，少なくも $r(A_{\alpha+1}) = r(B_{\alpha+1})$ だけあることがわかった．すなわち，$r(B_{\alpha+1}) \leqq |p^n(G^\alpha/G^{\alpha+1})| = |p^n G_\alpha|$ である．そして，$\alpha+1<\tau$ により G_α は非有界で，したがって $p^n G_\alpha$ は無限群だから，$|p^n G_\alpha| = r(p^n G_\alpha)$ である．nは任意の整数だったから，

$$r(B_{\alpha+1}) \leqq \min_{n<\omega}[r(p^n G_\alpha)] \quad ▮$$

補説 この定理で述べられた諸条件は，ウルム列の必要条件となるわけであるが，実は十分条件にもなることは，第6章で証明される．

---

*) 無限集合に一つの元を加えたり除いたりしても，濃度は変わらない．

**) G_α のほうには零元がはいっているから，$\alpha=\tau-1$ で，かつ G_α が有限群のときはこの不等式は成り立たぬが，その場合は $|G_\alpha|$ の代わりに $|G_\alpha|-1$ としておく．

第 5 章　ウルムの定理，コレチスの定理

1933 年に，ドイツのウルム（文献 [14]）が，p-群の理論において画期的な成果をあげた．可算な被約 p-群は，そのウルム列によって決定される，という結果である．すなわち，可算 p-群に対し同型問題を解決したのである．この定理は，今日でもアーベル群論の最もいちじるしい定理の一つであり，その証明も，やさしいとはいえない．本章では，カプランスキー-マッキー（文献 [10]）の方法に従って述べる．前章で述べたようにウルム型とウルム列が一致（同型）すれば，ウルム不変数列が一致するから，ウルム不変数列が一致するならば，群が同型になる，という形でこの定理を証明しよう．

このウルムの定理は，その後長く拡張されなかったが，1960 年にいたり，アメリカの青年数学者コレチス（文献 [11]）が，可算群の直和となる被約 p-群に対して，ウルムの定理を拡張した．証明にはウルムの定理を用いるが，コレチスの原証明はかなり複雑であった．1966 年にヒル（文献 [4]）がかなり簡易化したが，本書ではそれをさらに簡易化した方法で証明しよう．

5·1　ウルムの定理

ウルムの定理　p-群 G と H が，ともに可算でかつ被約であり，さらに，すべての順序数 α につき，$U_G(\alpha)=U_H(\alpha)$ であるならば，両者は同型である．

証明　まず証明のアウトラインを述べるなら，可算群をその有限部分群の可算昇列の結びとしてとらえ，高度*) を保つ同型対応を順次拡張して行くのである．そして，その拡張に際しては，“有限部分群 U を法とする任意の剰余類は，U に関し適正な元を含む” という命題と，“群 A と B が同型で，また A の部分群 A' と B の部分群 B' が同型であるとき，もし A' が有限群ならば，$A \doteqdot A'$ から $B \doteqdot B'$ が導かれる” という命題とを使用するのである．このように，有限部分群という条件を本質的に使わなければならないために，この証明を，一般の p-群に拡張はできないのである．

これから，しだいに定理の証明にはいって行くのであるが，G のある元 x の

*) 簡単のため，本章では超限的高度を単に高度と書くことにする．

高度 $H(x)$ という場合，かりにxがGのある部分群Uの元であるときも，xの高度は常にGで考えることを，はじめに注意しておこう．Hの元についても同様である．そして，高度については，4·1 節の命題3で述べた

（i） $H(x)<H(y)$ ならば $H(x+y)=H(x)$

（ii） $H(x)=H(y)$ ならば $H(x+y)\geqq H(x)$

（iii） $x\neq 0$ ならば $H(px)>H(x)$

の3性質が成り立つのである．

今，UをGの部分群とする．Gの元xが，Uの任意の元uにつき，$H(x)\geqq H(x+u)$ を満足するとき，xを部分群Uに関し**適正な元** (proper element) という．すなわち，Uを法とする一つの剰余類の中で，高度最大の元である．もしUが有限群ならば，各剰余類は有限集合だから，たしかにUに関し適正な元が存在する．xをUに関し適正な元とすると，任意の $u\in U$ につき，

$$H(x+u)=\min[H(x), H(u)] \tag{5·1}$$

が成り立つ．何故なら，前記（i）と（ii）から，

$$H(x+u)\geqq\min[H(x),\ H(u)]$$

であり，とくに $H(x)>H(u)$ なら，等号が成り立つ．また $H(x)\leqq H(u)$ のときは，xの仮定により，

$$\min[H(x),\ H(u)]=H(x)\geqq H(x+u)$$

で，やはり等号が成り立つのである．

さて，ウルムの定理の証明の中心は，次の補題の証明にある．

補題 定理における G，H に対し，φをGの有限部分群UからHの部分群Vの上への，高度を保つ同型写像とする．bをUに含まれぬGの元とすると，Uとbを含むGの有限部分群 $\bar{U}$ と，Vを含むHの部分群 $\bar{V}$ とを適当にとって，写像φを，$\bar{U}$ から $\bar{V}$ の上への高度を保つ同型写像 ψ へ拡張することができる．

まず，この補題から定理が容易に導かれることを示そう．GもHも可算群だから，その元に番号をつけて，$G=[g_1, g_2, \cdots], H=[h_1, h_2, \cdots]$ とする．U_0 をGの零群*) に，V_0 をHの零群にとり，Gのある有限部分群 U_n からHの有限部分群 V_n の上への，高度を保つ同型写像 φ_n がすでに作られたとする．nが偶数なら，U_n に含まれぬ最初の元 g_k をとり，補題により φ_n を，U_n と g_k

*) 零元のみよりなる部分群．

を含むGの有限部分群 U_{n+1} から，V_n を含むHの部分群 V_{n+1} への高度を保つ同型写像 φ_{n+1} へと拡張できる．n が奇数なら，V_n に含まれぬ最初の元 h_l をとり，同型写像 φ_n^{-1}*) について同じことを行なう．こうしてGとHを交互にとりかえることにより，GとHのすべての元がつくされてしまう．(もしも，Gの部分群からHの部分群への写像だけを順次とって行ったならば，Gの元はすべてつくされても，Hのほうはどうだかわからないのである．) こうして，GとHの同型対応が得られ，定理が証明されたことになる．

そこで，補題の証明にはいろう．まず，補題の中の元bにつき，$pb\in U$ と仮定しても一般性を失なわないことを示そう．実際，このような形で補題が証明されたとすると，一般の元 $b\notin U$ に対しても，$p^rb\notin U, p^{r+1}b\in U$ なる整数 r をとり，$p^rb=b_1$ とUに補題を適用して，これらを含む有限部分群 $\bar{U}_1$ が得られ，$b\in\bar{U}_1$ ならそれでよいし，そうでなければ $b^s\notin\bar{U}_1$, $b^{s+1}\in\bar{U}_1$ なる整数 s をとって，$p^sb=b_2$ と $\bar{U}_1$ に補題を適用する．この s は，$0\leqq s<r$ をみたしている．以下同様にして，一般の元 $b\notin U$ に対しても，補題が成立することになるのである．

したがって，補題の中の元bは，$pb\in U$ を満足するものとする．さて，Uは有限部分群であるから，剰余類 $b+U$ はUに関し適正な元 b' を含んでいる．そのような有限個の b' の中で，さらに $H(pb')$ が最大のものをとり，それを a とする．

この元aに対し，Vに含まれない，Vに関し適正なHの元cであって，

$$H(c)=H(a),\ pc=\varphi(pa) \tag{5·2}$$

なるごときものが存在することを示そう．

$H(a)=\gamma$ とし，二つの場合にわけて元cの存在を証明する．

I． $H(pa)=\gamma+1$ の場合　　群Gの長さをλとする．さて，最初の元bはUに含まれぬ元であったから，剰余類 $b+U$ からとった元aは0でない．ゆえに $\gamma<\lambda$ で，$H(0)=\lambda+1$ という規約であったから，$H(pa)=\gamma+1$ である現在の場合，pa は0でないことがわかる．そして，φは高度を保つ同型写像だから，$\varphi(pa)$ も0でなく，高度は $\gamma+1$ である．よって，4・1 節の問4により，

*) φ_n のいわゆる逆写像である．

$$H(c)=\gamma=H(a),\quad pc=\varphi(pa)$$

なる元 $c\in H$ が存在する．

このcはVには含まれない．もし含まれるとすると，$\varphi u=c$ なる元 $u\in U$ があるはずである．すると，

$$\varphi(pa)=pc=p(\varphi u)=\varphi(pu)$$

で，$pa=pu$ が得られ，$p(a-u)=0$ となる．a は U に関し適正な元であったから，(5·1) により，

$$H(a-u)=\min[H(a),\ H(-u)]=\min[H(a),\ H(u)]$$

で，$H(a)=\gamma$ であり，一方 $\varphi u=c$ により，$H(u)=H(c)=\gamma$ であるから，$H(a-u)=\gamma$ となる．ゆえに，a と同様，$a-u$ も U に関し適正な元である．しかし，

$$H(pa)=\gamma+1<\lambda+1=H(0)=H(p(a-u))$$

であって，$H(pa)$ を最大にとったことに反するのである．

次に，元 c は V に関し適正である．そうでないとすると，$H(c+v)>H(c)$ なる元 $v\in V$ が存在する．c が V に含まれぬことはすでに証明してあるから，$c+v$ は0でないことがわかる．この v に対し，$\varphi u=v$ なる元 $u\in U$ をとる．$pc=\varphi(pa)\in V$，$pv=\varphi(pu)\in V$ で，φ が高度を保つ同型写像なることと，$c+v\neq 0$ とを用いて，

$$\gamma=H(c)<H(c+v)<H(pc+pv)=H(pa+pu)$$

となり，

$$H(p(a+u))>\gamma+1 \tag{5·3}$$

が得られる．ところが，$a+u$ も U に関し適正である．実際，まず $H(c+v)>H(c)$ から，高度の性質（i）により，

$$H(v)=H((c+v)-c)=H(c)$$

であるから，$H(u)=H(v)=H(c)=\gamma$ で，$H(a)=\gamma$ なることと，a が U に関し適正なることから，

$$H(a+u)=\min[H(a),\ H(u)]=\gamma$$

で，$a+u$ も U に関し適正となる．すると，(5·3) と $H(pa)=\gamma+1$ とが，a のとり方と矛盾することになるのである．

II．$H(pa)>\gamma+1$ の場合　　この場合，4·1 節の問3により，

$$H(a')\geqq\gamma+1,\ \ pa'=pa$$

なる元 $a'\in G$ がとれる．$H(a')>\gamma=H(a)$ だから，

$$H(a-a')=\min[H(a),\ H(a')]=H(a)=\gamma$$

で，$a-a'=a''$ もまた，U に関し適正である．何故なら，任意の $u\in U$ に対し，a が適正なことから，

$$H(a')>H(a)\geqq H(a+u)$$

で，したがって

$$\begin{aligned}H(a-a'+u)&=\min[H(a'),\ H(a+u)]\\&=H(a+u)\leqq H(a)=H(a-a')\end{aligned}$$

となるからである．

ウルムの定理の証明のこの段階までは，実はウルム不変数列の一致を全然使わなかったわけである．これからはじめて，それを使用しよう．

群 G, H の台部分群をそれぞれ P, Q とし，任意順序数 α に対し，$P_\alpha=P\cap p^\alpha G$, $Q_\alpha=Q\cap p^\alpha H$ とおく．剰余群 $P_\alpha/P_{\alpha+1}$, $Q_\alpha/Q_{\alpha+1}$ の階数が，α 番目のウルム不変数であったから，定理の仮定により，各 α につき，

$$r(P_\alpha/P_{\alpha+1})=r(Q_\alpha/Q_{\alpha+1}) \tag{5. 4}$$

が成立する．

次に，各順序数 α に対し，

$$U_\alpha=U\cap p^\alpha G,\ \ V_\alpha=V\cap p^\alpha G$$

とおく．φ が高度を保つことから，各 α につき，φ は U_α を V_α の上に写像する．U_α の元 u で，$H(pu)\geqq\alpha+2$ なるもの全体，すなわち $U_\alpha\cap p_G{}^{-1}(p^{\alpha+2}G)$ は，U_α の部分群 U_α' をなす．同様に，V_α の部分群 V_α' を定義する．すると，

$$U_\alpha\supseteq U_\alpha'\supseteq U_{\alpha+1},\ \ V_\alpha\supseteq V_\alpha'\supseteq V_{\alpha+1}$$

であるが，φ は U_α' を V_α' の上に写すから，

$$r(U_\alpha'/U_{\alpha+1})=r(V_\alpha'/V_{\alpha+1}) \tag{5・5}$$

である．

U_α' の定義により，4・1 節の問 3 を用いて，任意の $u\in U_\alpha'$ に対し，$pu=py$ なる元 $y\in p^{\alpha+1}G$ がとれる．$z=u-y$ とおくと，z は P_α に含まれる．u を固定すると，$y\in p^{\alpha+1}G$ はいろいろとれるが，$P_{\alpha+1}$ を法として，同一の z を与える．したがって，u に剰余類 $z+P_{\alpha+1}$ を対応させると，U_α' から $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ の

ある部分群 A_α の上への準同型写像が得られ，その核はちょうど $U_{\alpha+1}$ になる．実際，$u\in U_{\alpha+1}$ とすれば，$pu=py$ なる $y\in p^{\alpha+1}G$ を u 自身にとれるから，$z=0$ となる．逆に，$z\in P_{\alpha+1}$ とすると，$u\in U\cap p^{\alpha+1}G=U_{\alpha+1}$ となるのである．かくて，$U_\alpha'/U_{\alpha+1}$ は $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ のある部分群 A_α と同型である．

以上は，任意の順序数 α についていえることである．われわれの $\alpha=\gamma$ の場合にもどり，前述の元 $a-a'=a''$ を考えよう．

剰余類 $a''+P_{\gamma+1}$ は A_γ に属しない．もし属するとすると，ある $u\in U_\gamma'$ に対し，$pu=py$ なる $y\in p^{\gamma+1}G$ がとれて，

$$u-y\equiv a''(\mathrm{mod}\ P_{\gamma+1})$$

となるわけであるが，$y\in p^{\gamma+1}G$ により，$u-a''\in p^{\gamma+1}G$ が得られる．したがって，

$$H(a''-u)>H(a'')=\gamma$$

となり，すでに証明した，a'' が U に関し適正なることに反するのである．

かように，$a''+P_{\gamma+1}$ が A_γ に属しないことから，

$$r(P_\gamma/P_{\gamma+1})>r(A_\gamma)=r(U_\gamma'/U_{\gamma+1})$$

がいえることになる．何故なら，A_γ は $P_\gamma/P_{\gamma+1}$ の真部分群であって，かつ，Uが有限群だから，$A_\gamma\cong U_\gamma'/U_{\gamma+1}$ は有限群だからである*⁾．

よって，(5·4)，(5·5) で $\alpha=\gamma$ とおいて，

$$r(Q_\gamma/Q_{\gamma+1})>r(V_\gamma'/V_{\gamma+1})$$

が得られる．今，A_γ と同じ方法で，$Q_\gamma/Q_{\gamma+1}$ の部分群 B_γ を定義すると，$r(B_\gamma)=r(V_\gamma'/V_{\gamma+1})$ だから，

$$r(Q_\gamma/Q_{\gamma+1})>r(B_\gamma)$$

となる．よって，$Q_\gamma/Q_{\gamma+1}$ は B_γ に属さぬ元 $c'+Q_{\gamma+1}$ $(c'\in Q_\gamma)$ を含んでいる．

元 c' は，V に関し適正である．そうでないとすると，$H(c'-v)>H(c')$ なる元 $v\in V$ があるが，c' はそのとり方から明らかに高度 γ で，

$$H(v)=H(c'-(c'-v))=\min[H(c'),\ H(c'-v)]=H(c')$$

となる．$H(c'-v)>H(c')=\gamma$ により，$c'-v=pt$ なる $t\in p^\gamma H$ がとれ，両辺に p をかけて $-pv=p^2t$ となる．したがって，$H(pv)\geqq\gamma+2$ となる．このことは，pt が 0 でない場合，高度の性質 (iii) から直ちに得られる．また，

*⁾ 初等 p-群 $P_\gamma/P_{\gamma+1}$ の階数が有限のときと無限のときとにわけて考えれば容易にわかる．

$pt=0$ の場合，既述のように $\lambda>\gamma$ であったから，$H(pv)=H(0)=\lambda+1\geqq\gamma+2$ となるのである．かくて，$v\in V_\gamma'$ なることがわかった．すると，$pc'=0$ により，$c'=v-(v-c')$ の両辺に p をかけて，$pv=p(v-c')$ で，$v-c'=-pt\in p^{\gamma+1}H$ となる．これから，$c'+Q_{\gamma+1}$ が B_γ に属することになる．実際，v（以前の u に当る）から，$pv=p(v-c')$ により，$v-c'\in p^{\gamma+1}H$ をとると，これが以前の y に当り，$v-(v-c')=c'$ が以前の $z=u-y$ に当って，剰余類 $c'+Q_{\gamma+1}$ を v に対応させれば，$c'+Q_{\gamma+1}$ が B_γ に属することがわかるのである．これは c' のとり方に矛盾する．したがって，c' は V に関し適正なのである．

さて，$H(pa)>\gamma+1$ により，$\varphi(pa)=pd$, $H(d)\geqq\gamma+1$ なる $d\in H$ がとれる．$c=c'+d$ とおこう．$H(c')=\gamma$ であったから，$H(c)=H(c')=\gamma$ で，また $pc'=0$ であるから，$pc=pd=\varphi(pa)$ である．すなわち，c は条件 (5·2) を満足する．この c は，V に関し適正である．実際，任意の $v\in V$ に対し，$H(c')\geqq H(c'+v)$ で，かつ $H(d)>H(c')$ であるから，

$$H(c+v)=H(c'+d+v)=\min[H(c'+v),\ H(d)]$$
$$=H(c'+v)\leqq H(c')=H(c'+d)=H(c)$$

となるのである．

最後に，$c\notin V$ を示そう．$b\notin U$ だから $a\notin U$ で，a は 0 でない．ゆえに，$H(c)=H(a)<H(0)$ で，これから $c\neq 0$ が得られる．何故なら，G と H でウルム不変数列が一致することから，H の長さも λ となるからである*)．しかるに，c は V に関し適正であったから，もし $c\in V$ ならば，V に含まれる高度最大の元として，$c=0$ でなければならない．ゆえに $c\notin V$ となるのである**)．

これから先の証明は，かんたんである．I，II いずれの場合にも，補題で述べられた元 $b\notin U$ と（U を法として）同じ剰余類に属する元 a（したがって $\notin U$）に対し，H の元 c であって，V に属さず，(5·2) を満足するものがとれることがわかったから，U から V の上への，高度を保つ同型写像 φ を，元 a と元 c を用いて，$\{U, b\}=\{U, a\}$ から $\{V, c\}$ の上への同型写像であって，ち

*) 4·2 節の命題 1 参照.

**) I ではまず $c\notin V$ を証明し，それを使って c が V に関し適正なことを証明したが，II では c が V に関し適正なことをまず証明し，それを使って $c\notin V$ を証明している．そうした所に，この証明の技巧的な面白さが見られるのである．

ょうど元 a を元 c に写すようなもの，に拡張することができる．すなわち，$\{U, a\}$ の任意の元 $u+xa$ $(u\in U,\ 0\leqq x<p)$ に，$\{V, c\}$ の元 $\varphi u+xc$ を対応させるのである．これが同型写像であることは，φ がそうであることと，a, c がそれぞれ p 倍してはじめて U, V に含まれることから得られる．また，

$$H(u+xa)=H(\varphi u+xc)$$

を示すには，$x=0$ のときは問題ないから，$0<x<p$，したがって x は p でわれないとし，$u+xa=x(u'+a)$ $(u'\in U)$ と書き直せば*)，a, c がそれぞれ U, V に関し適正なこととを用いて，

$$\begin{aligned} H(u+xa)&=H(u'+a)=\min[H(u'),\ H(a)]\\ &=\min[H(\varphi u'),\ H(c)]\\ H(\varphi u+xc)&=H(x\varphi u'+xc)=H(\varphi u'+c)\\ &=\min[H(\varphi u'),\ H(c)] \end{aligned}$$

なるようにして示される．すなわち，これは高度を保つ同型写像であり，ウルムの定理の証明が完了したわけである．　▮

5·2 コレチスの定理

前節で証明されたウルムの定理は，可算群の直和となる p-群に拡張される．

コレチスの定理　p-群 G と H が，ともに可算な被約 p-群の直和であって，かつ，すべての順序数 α につき，$U_G(\alpha)=U_H(\alpha)$ であるならば，両者は同型である．

証明**)　$G=\sum_{\mu\in M}G_\mu$ と $H=\sum_{\nu\in N}H_\nu$ を，それぞれ G と H の可算な被約 p-群の直和への分解とする．4·2 節の定理1により，各 $\mu\in M$ につき G_μ の主基***) P_μ がとれ，また各 $\nu\in N$ につき H_ν の主基 Q_ν がとれる．和集合 $\vee_{\mu\in M}P_\mu=P$, $\vee_{\nu\in N}Q_\nu=Q$ を作れば，4·2 節の命題6により，P, Q はそれぞれ G, H の主基である．仮定により，G と H は同じウルム不変数列をもつから，4·2 節の命題7により，P から Q の上への一対一写像 ρ であって，高度を保つようなものが存在する．

部分集合族 $[Q_\nu]_{\nu\in N}$ は，集合 Q の一つの類別である．また，部分集合族

*) u は p-群 U の元だから，2·1 節の命題3により $u=xu'$ $(u'\in U)$ と表わされる．
**) 本田（文献［7］）による．
***) この証明において，主基とはすべて超限的主基の意．

$[\rho P_\mu]_{\mu\in M}$ も Q の一つの類別である．しかるに，一つの集合の類別の全体は束をなす*)．すなわち，二つの類別 α と β とは，α が β の細分であるとき，換言すれば，α の任意の類 C に対し，$C\subseteq D$ なる β の類 D が存在するとき，$\alpha\geqq\beta$ として，順序 $\geqq$ を導入すれば，束となるのである．この束の意味での，$[Q_\nu]_{\nu\in N}$ と $[\rho P_\mu]_{\mu\in M}$ の交わりを $[B_\iota]_{\iota\in I}$ としよう．したがって，$[Q_\nu]$ も $[\rho P_\mu]$ も $[B_\iota]$ の細分であって，Q の 2 元 q, q' が同じ B_ι に含まれるための条件は，

$$q=q_1, q_2, \cdots, q_r=q'$$

なる Q の元の有限列が存在し，各 $i(1\leqq i<r)$ につき，q_i と q_{i+1} が，同一の Q_ν に含まれるか，それとも同一の ρP_μ に含まれるか，少なくともどちらかが成り立つ，ということである．この有限列において，q_1 を固定すれば，Q_ν も ρP_μ も可算だから，q_2 も可算である．したがって q_3 も可算である．以下同様にして，q_r も可算である．すなわち，各 $B_\iota(\iota\in I)$ は可算集合である．

次に，各 $\iota\in I$ に対し，$\rho^{-1}B_\iota=A_\iota$ とおく，類別 $[\rho P_\mu]$ が類別 $[B_\iota]$ の細分であったから，$[P_\mu]$ も $[A_\iota]$ の細分である．よって，各 $\iota\in I$ につき，$A_\iota=\vee_{\mu\in M_\iota}P_\mu$ と表わすことができる．(ここに $[M_\iota]_{\iota\in I}$ は M の一つの類別である．) この添数集合 M_ι に対し，$\sum_{\mu\in M_\iota}G_\mu=\bar{A}_\iota$ とおけば，A_ι は $\bar{A}_\iota$ の主基である．同様に，$[Q_\nu]$ は $[B_\iota]$ の細分だから，各 $\iota\in I$ につき，$B_\iota=\vee_{\nu\in N_\iota}Q_\nu$ と表わされ，$[N_\iota]_{\iota\in I}$ は N の一つの類別である．$\sum_{\nu\in N_\iota}H_\nu=\bar{B}_\iota$ とおけば，B_ι は $\bar{B}_\iota$ の主基である．

さて，各 $\iota\in I$ につき，A_ι と B_ι との間には，前記 ρ により，高度を保つ一対一対応があるから，二つの群 $\bar{A}_\iota$ と $\bar{B}_\iota$ とは，同じウルム不変数列をもつ．そして，A_ι と B_ι とが可算だから，群 $\bar{A}_\iota$ と $\bar{B}_\iota$ とは，その台部分群がいずれも可算である．ゆえに $\bar{A}_\iota$ と $\bar{B}_\iota$ もやはり可算である**)．したがって，ウルムの定理により，$\bar{A}_\iota\cong\bar{B}_\iota$ を得る．こうして，

$$G=\sum_{\iota\in I}\bar{A}_\iota\cong\sum_{\iota\in I}\bar{B}_\iota=H$$

が得られるのである． ▮

なお，最近クローリー［1］は，次のような結果を証明している．

クローリーの定理 群 G が有限のウルム型 n の被約 p-群で，最初の $n-1$

---

*) たとえば，中山（文献［12］）56 ページ参照．

**) 2·1 節の命題 6 参照．もし台部分群が有限群ならば，2·7 節の命題 6 により，(被約性から) 群も有限群となる．

個のウルム因子 $G_0, \cdots, G_{n-2}$ が巡回群の直和ならば，そのウルム列がGのそれと同型な被約 p-群は，Gと同型である.

しかし，一般の p-群についての同型問題の解決は，前途遼遠で，まったく新しい構想を必要とするもののようである.

第6章　クリコフの定理

前章では被約 p-群の同型問題について，ウルムの定理とコレチスの定理を証明した．本章では，存在問題をとりあつかう．6·1 節ではクリコフの存在定理を証明する．一般被約 p-群のウルム列につき，4·3 節の定理1は，与えられた群の列に対し，それらと同型なウルム列をもつ群が存在するための，一つの必要条件を示していることになるが，それが存在のための十分条件でもあることを示すのが，クリコフの定理なのである．その証明はかなり面倒であるが，十分ていねいに述べることにしよう．6·2 節では，可算群の場合のジッピンの存在定理を，クリコフの定理からまず導き，さらに，可算群の直和となる被約 p-群の存在条件を明らかにする．

同型問題と存在問題が，構造論の二大テーマであるが，難易という点からいうなら，同型問題のほうが，はるかに困難なようである．

6·1　クリコフの定理

本節では，次の定理を証明する．

クリコフの定理　$\mathfrak{p}$ を一つの濃度，τ を0ならざる一つの順序数とし，群の列 $[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$ において，各 G_α は 0 以外に無限高度の元をもたない p-群で，$\alpha=\tau-1$ の場合以外は非有界とする．そして，次の条件をみたすとする．

（i）　$\sum_{0\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|\leqq\mathfrak{p}\leqq\prod_{0\leqq\alpha<\min[\omega,\tau]}|G_\alpha|$

（ii）　$\sum_{\beta\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|\leqq|G_\beta|^{\aleph_0}$　$(0\leqq\beta<\tau)$

（iii）　$r(B_{\alpha+1})\leqq\min_{n<\omega}[r(p^nG_\alpha)]$　$(\alpha+1<\tau)$

ここに $B_{\alpha+1}$ は $G_{\alpha+1}$ の基部分群である．すると，被約 p-群 G であって，濃度が $\mathfrak{p}$ に等しく，ウルム型が τ で，そのウルム列が $[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$（と同型）となるようなものが存在する．

補題　$[G_k]_{k<\omega}$ を，0 以外に無限高度の元を含まぬ，零群でない p-群の列とし，$\mathfrak{p}$ を不等式

a）　$\sum_{k<\omega}|G_k|\leqq\mathfrak{p}\leqq\prod_{k<\omega}|G_k|$

b）　$r(B_{k+1})\leqq\min_{n<\omega}[r(p^nG_k)]$

を満足する濃度とする．（B_{k+1} は G_{k+1} の基部分群である．）すると，被約な

p-群 G であって，濃度が $\mathfrak{p}$ に等しく，ウルム型が ω で，ウルム列が $[G_k]_{k<\omega}$（と同型）になるものが存在する．

注意 1 定理のほうの（ii）に当る

$$\sum_{n\leq k<\omega}|G_k|\leqq|G_n|^{\aleph_0}$$

がかけているのを，不審に思う読者もあるかも知れないが，これは条件 b）と 3·3 節の定理5から導かれるのである．実際，

$$|G_{n+1}|\leqq|B_{n+1}|^{\aleph_0}\leqq|G_n|^{\aleph_0}$$
$$|G_{n+2}|\leqq|G_{n+1}|^{\aleph_0}\leqq|G_n|^{\aleph_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

で，これらを全部加えればよい*)．

注意 2 各 G_{k+1} が零群でないから，B_{k+1} も零群でなく，条件 b）から $\min_{n<\omega}[r(p^nG_k)]>0$ である．よって G_k は非有界であることがわかる．

補題の証明 6段にわけて行なう．

A) まず，ウルム型が ω，濃度が $\mathfrak{q}=\sum_{k<\omega}|G_k|$，ウルム列が $[G_k]_{k<\omega}$ なる群Hを構成しよう．各 $G_k(k<\omega)$ で準基 $[a_{k\lambda}, c_{k\mu}{}^{(n)}]$ をとり，それに対応して，群Hを，生成元 $u_{k\lambda}$ と $v_{k\mu}{}^{(n)}(k<\omega,\ \lambda\in\Lambda_k,\ \mu\in M_k,\ 1\leqq n<\omega)$ を有し，次の基本関係で定義される群とする．

1° $E(a_{k\lambda})=n_{k\lambda}$**) ならば $p^{n_{k\lambda}}u_{k\lambda}=0$

2° $pv_{k\mu}{}^{(1)}=u_{k+1,\lambda}$ または 0

3° $pc_{k\mu}{}^{(n+1)}=c_{k\mu}{}^{(n)}-s_1a_{k\lambda_1}-\cdots-s_la_{k\lambda_l}$ ならば

$$pv_{k\mu}{}^{(n+1)}=v_{k\mu}{}^{(n)}-s_1u_{k\lambda_1}-\cdots-s_lu_{k\lambda_l}$$

そして，はじめ G_k の準基をとる際，基部分群 B_k として，3·3 節の定理4により，$r(G_k/B_k)=\min_{m<\omega}[r(p^mG_k)]$ なるようなものをとっておくことにする．すると，補題における条件 b）により，$r(B_{k+1})\leqq r(G_k/B_k)$ で，したがって Λ_{k+1} の濃度は M_k の濃度をこえない．それゆえ，各 k に対し，すべての $u_{k+1,\lambda}$ が 2° の右辺にちょうど1回ずつ現われるように，基本関係を定めることができる***)．

B) 群 H は，p-群である．それをいうには，生成元 $u_{k\lambda}$ と $v_{k\mu}{}^{(n)}$ がすべて，pのベキを位数とすることを示せばよい．1° により $u_{k\lambda}$ はたしかにそう

---

*) $|G_n|\leqq|G_n|^{\aleph_0}$ も加える．$|G_n|^{\aleph_0}$ は無限濃度だから，$\aleph_0$ だけ加えても同じである．

**) 2·1 節で述べたように，$E(a_{k\lambda})$ は $a_{k\lambda}$ の指数で，$a_{k\lambda}$ の位数が $p^{n_{k\lambda}}$ なることを意味する．

***) あぶれた $v_{k\mu}{}^{(1)}$ については，$pv_{k\mu}{}^{(1)}=0$ とおくわけである．

である．したがって，2° により，$v_{k\mu}^{(1)}$ もそうである．さらに，$n\geqq 1$ に対し，$v_{k\mu}^{(n)}$ がそうであることが証明されれば，3° により $v_{k\mu}^{(n+1)}$ もそうである．よって帰納法によりすべての $v_{k\mu}^{(n)}$ がそうであることがわかる．

次に，群 H の濃度が q であることを示そう．やはり 1°, 2°, 3° を用いて，H の任意の元 $x\neq 0$ は，

$$x=l_1u_{k_1\lambda_1}+\cdots+l_ru_{k_r\lambda_r}+m_1v_{k_1'\mu_1}^{(n_1)}+\cdots+m_tv_{k_t'\mu_t}^{(n_t)} \qquad (6\cdot 1)$$

の形に表わされる．ここに (k_i, λ_i) はことなる r 個の組，すなわち，$i\neq i'$ ならば $k_i\neq k_{i'}$ か $\lambda_i\neq\lambda_{i'}$ かの少なくも一方が成り立つとし，各 i につき $0<l_i<p^{n_{k_i\lambda_i}}$ をみたす．また (k_j', μ_j) もことなる t 個の組で，各 j につき $0<m_j<p^{n_j}$ かつ $p\nmid m_j$ とする．（u か v の一方が欠けることもある．）ところで，逆に (6·1) の形に表わされ，u か v の少なくとも一方はたしかに存在する．すなわち $r+t>0$ であるような元 x は，H で実際 0 とことなるのである．それは，何となくそうらしく思われるけれども，明確に証明する必要があるのである*)．このため，この特定の元 x に対し，群 H からプリューファーの群 $Q=C(p^\infty)$ の中への準同型写像を次のように構成する．まず $u_{k\lambda}$ には指数高々 $n_{k\lambda}$ の Q の元を対応させる．それらと 2° で適合するように，$v_{k\mu}^{(1)}$ の像をきめる．（Q は可除群だから，これは可能である．）2° の右辺が 0 のときは，$v_{k\mu}^{(1)}$ の像として，Q の任意の位数 p の元か 0 をとる．さらに，$v_{k\mu}^{(n)}$ の像がきまったとし，3° に適合するように $v_{k\mu}^{(n+1)}$ の像をきめて行く．こうして，H の生成団から Q の中への写像 φ が得られ，基本関係が明らかに保存されるから，2·4 節の定理 2 により，φ をひきおこすような，H から Q の中への準同型写像 $\bar{\varphi}$ が存在する．

ところで，$u_{k\lambda}$, $v_{k\mu}^{(n)}$ の像を適当にえらぶことにより，問題の元 x が 0 には写されないようにすることができる．実際，$t=0$ の場合，$u_{k_1\lambda_1}$ はちょうど指数 $n_{k_1\lambda_1}(>0)$ の元に写し，他の $u_{k_i\lambda_i}$ はみな 0 に写すようにすることができる．すると x は確かに 0 でない Q の元に写される．また $t>0$ の場合，必要に応じ px, $p^2x,\cdots$ をとることにより，$n_1=n_2=\cdots=n_t=1$ と仮定してもよい．そして，x の表示に現われる $u_{k_i\lambda_i}$ と $v_{k_j'\mu_j}^{(1)}$ が，$v_{k_1'\mu_1}^{(1)}$ の外はみな 0 に，$v_{k_1'\mu_1}^{(1)}$ だ

*) 生成団と基本関係で定義された群の正体は，一般にはわかりにくい．それは極端な場合，零群かも知れないのである．

けは0でない元に，写されるようにすることができる．

こうして，準同型写像 φ を適当にえらぶと，元 x の像が Q の0でない元になるから，x はたしかにHの0でない元である．このことから，(6·1) の表示の一意性が得られることになる*)．また，すべての $u_{k\lambda}, v_{k\mu}^{(n)}$ は，実際にことなる H の元であることもわかる．したがって，その濃度は $a_{k\lambda}, c_{k\mu}^{(n)}$ の濃度に等しい．注意2により，G_k は無限群で，その生成団(やはり無限集合)$[a_{k\lambda}, c_{k\mu}^{(n)}]$ と濃度が等しいから (1·1 節の問2)，

$$|H|=\sum_{k<\omega}|G_k|=\mathfrak{q}$$

となるのである．

C) 次に，Hのウルム列が $[G_k]_{k<\omega}$ と同型になることを示そう．

まず，$k'\geqq k$ なるとき，$u_{k'\lambda}$ と $v_{k'\mu}^{(n)}$ は H^k に属する．この命題は，$k=0$ では自明だから，k に関する帰納法を用いることにし，整数 k では正しいものとする．$k'\geqq k$ なる任意の k' に対し，もし $pv_{k'\mu}^{(1)}=u_{k'+1,\lambda}$ ならば，

$$p^n v_{k'\mu}^{(n)}=u_{k'+1,\lambda} \quad (n\geqq 1) \tag{6·2}$$

である．実際，3·3 節の (3·11) により，3° の最初の式が成り立つなら，

$$p^n(s_1 a_{k'\lambda_1}+\cdots+s_l a_{k'\lambda_l})=0$$

となり，したがって各 i につき，$p^{n_{k'\lambda_i}}$ が $p^n s_i$ をわる．ゆえに 1° により，

$$p^n(s_1 u_{k'\lambda_1}+\cdots+s_l u_{k'\lambda_l})=0$$

となり，3° によって $p^{n+1}v_{k'\mu}^{(n+1)}=p^n v_{k'\mu}^{(n)}$ が得られるから，その n に $n-1$, $n-2, \cdots$を代入して，(6·2) が得られるのである．ところで，A) で述べたように，任意の $u_{k'+1,\lambda}$ はかならず $pv_{k'\mu}^{(1)}=u_{k'+1,\lambda}$ の形に表わされるから，(6·2) が実際すべての自然数 n につき成り立つのである．すると，帰納法の仮定により，$v_{k'\mu}^{(n)}\in H^k$ だから，$u_{k'+1,\lambda}\in H^{k+1}$ なることがわかる．

次に，各 $v_{k'+1,\mu}^{(n)}$ も H^{k+1} に属する．何故なら，3° により，任意の自然数 t に対し，

$$v_{k'+1,\mu}^{(n)}=p^t v_{k'+1,\mu}^{(n+t)}+m_1 u_{k'+1,\lambda_1}+\cdots+m_r u_{k'+1,\lambda_r}$$

の形をなし，上述により各 $u_{k'+1,\lambda}$ が H^k で無限高度であることと，帰納法の仮定により $v_{k'+1,\mu}^{(n+t)}$ がH^k に属することから，$v_{k'+1,\mu}^{(n)}\in H^{k+1}$ となる

*) 二つの表示があったとすると，その差を作り，適当に 1°, 2°, 3° を用いて (6·1) の形に書き直すと，今証明したことから，すべての項がなくなってしまうことを用いればよい．

のである.

一方,

$$x = l_1 u_{k\lambda_1} + \cdots + l_r u_{k\lambda_r} + m_1 v_{k\mu_1}{}^{(n_1)} + \cdots + m_t v_{k\mu_t}{}^{(n_t)} \tag{6·3}$$

の形の元は, H^{k+1} に属さない. ただし λ_i はすべてことなり, $0<l_i<p^{n_{k\lambda_i}}$ であり, μ_j もすべてことなり, $0<m_j<p^{n_j}$, $p\nmid m_j$ で, $r+t>0$ とする. これを証明するには, まず $k=0$ の場合, $u_{0\lambda}$ に $a_{0\lambda}$ を, $v_{0\mu}{}^{(n)}$ に $c_{0\mu}{}^{(n)}$ を対応させ, $k\geqq 1$ なる k については $u_{k\lambda}$ にも $v_{k\mu}{}^{(n)}$ にも 0 を対応させて, H の生成団から G_0 の中への写像 φ_0 が得られ, これは H の基本関係を保存する. よって, φ_0 をひきおこすような H から G_0 の中への準同型写像 $\bar{\varphi}_0$ が存在する. $\bar{\varphi}_0$ を x に適用すると, (6·3) の右辺の u, v を a, c にかえたものになるから, たしかに 0 でない G_0 の元である. G_0 は 0 以外に無限高度の元を有さないから, $\bar{\varphi}_0 x$ は G_0 で無限高度でない. しかるに, 準同型写像では, 無限高度の元は無限高度の元に写される. したがって $x\notin H^1$ なることが示された. そこで, H^1 の任意の元 y を, まず

$$[u_{0\lambda}, v_{0\mu}{}^{(n)}],\ [u_{1\lambda}, v_{1\mu}{}^{(n)}], \cdots$$

で表わすと, 第 2 項以下で表わされた部分は H^1 の元だから, 第 1 項で表わされた部分も H^1 に属し, 今証明したことから, その部分は 0 でなければならない. したがって, H^1 は $[u_{k\lambda}, v_{k\mu}{}^{(n)}]$ $(k\geqq 1)$ を生成団としており, かつ $H^0/H^1\cong G_0$ なることがわかった*). 同じ推論が $k\to k+1$ でも行なうことができ, $H^k/H^{k+1}\cong G_k$ となる. したがって群 H はウルム型 ω で, ウルム列が $[G_k]_{k<\omega}$ と同型になるのである.

D) 補題にいう濃度 $\mathfrak{p}$ が, $\mathfrak{q}$ に等しい場合は, 以上で証明が終る. そうでないとし, 今度は濃度が $\mathfrak{r}=\Pi_{k<\omega}|G_k|$ で, ウルム型が ω, かつウルム列が同じ $[G_k]_{k<\omega}$(と同型) なる群 J を, 次のように構成する.

J として, すべてのベクトル $w=\langle w_0, w_1, \cdots, w_k, \cdots\rangle$ の全体をとる. ただし, k 番目**)の成分は, (6·3) の形の元 w_k であり, 一つの w において, w_k の全体は, その位数 (H における) が有界なるものとする. 和 $w+w'$ は次のように定義する. まず同じ番目の成分ごとに加え, それから, 基本関係 1°, 2°, 3°

*) 前記写像 $\bar{\varphi}_0$ は, H^0 から G_0 の上への準同型写像で, その核が H^1 だからである.

**) 最初を 0 番目として数えはじめた k 番目.

によって (6·3) の形に書き直すのであるが，その際，$pv_{k\mu}^{(1)}$ がある $u_{k+1,\lambda}$ に等しい場合は，$u_{k+1,\lambda}$ に書き直して，かつ $k+1$ 番目の成分のほうに移すのである．この算法により，J は群となり，さらに p-群となる．これらのことは，何となくそうらしくは思われるが，決して自明ではない．上記のように，k 番目の成分 $pv_{k\mu}^{(1)}$ を $u_{k+1,\lambda}$ にかえて $k+1$ 番目の成分の中へ移すという操作があるからである．きちんと証明するには，次のようにするのである．

H の生成元 $u_{k\lambda}, v_{k\mu}^{(n)}$*) にそれぞれ整数をかけて，すべての k, λ, μ, n につき加えた，形式的な1次結合の全体を考える**)．ただし，各 k につき，$u_{k\lambda}$ も $v_{k\mu}^{(n)}$ も，高々有限個しか現われないものに限定する***)．これら全体に，さらに基本関係 1°, 2°, 3° を導入して，一つの群になることは明らかで，その p-準素成分を J' とする．J と J' の間には，容易に同型対応が設定できる．すなわち，J の元 $w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ に対し，形式的な和 $w_0+w_1+\cdots$ なる J' の元を対応させればよいのである．したがって，J は p-群となる．

J の濃度は，$\mathfrak{r}=\Pi_{k<\omega}|G_k|$ に等しい．これも，自明なことではない．ベクトル $w=\langle w_0, \cdots, w_k, \cdots\rangle$ には，w_k が（Hで考えて）位数有界という条件がはいるからである．そこで，次のような工夫をする．各 k につき，G_k の濃度は，生成団 $u_{k\lambda}$ と $v_{k\mu}^{(n)}$ 全体の濃度に等しく，さらに，n を1だけに限定した，$u_{k\lambda}$ と $v_{k\mu}^{(1)}$ 全体の濃度に等しい．ところで，基本関係 2° において，$pv_{k\mu}^{(1)}=u_{k+1,\lambda}$ となるような $v_{k\mu}^{(1)}$ と $u_{k+1,\lambda}$ の対応を適当につけることによって，そうならないような $v_{k\mu}^{(1)}$，すなわち，$pv_{k\mu}^{(1)}=0$ なる如きもの全体と $u_{k\lambda}$ 全体とを合わせたものが，濃度 $|G_k|$ になるようにできる．何故なら，注意2により

$$r(G_k/B_k)=\min_{m<\omega}[r(p^mG_k)]$$

は0でなく，G_k は非有界だから，各 p^mG_k も非有界で，したがって $r(G_k/B_k)=\mathfrak{m}_k$ は無限濃度である．ゆえに，$v_{k\mu}^{(1)}$ の添数 μ は濃度 $\mathfrak{m}_k$ 個にわたり動くから，$\mathfrak{m}_k=\mathfrak{m}_k+\mathfrak{m}_k$ により，$v_{k\mu}^{(1)}$ 全体を二つの，それぞれ濃度 $\mathfrak{m}_k$ の部分集合にわけ，その一つのほうに属する $v_{k\mu}^{(1)}$ についてだけ，そのあるものに $pv_{k\mu}^{(1)}=u_{k+1,\lambda}$ の形の関係を設定することにするのである．こうしておいて，

*) 本当はこれにプライムをつけ，$u'_{k\lambda}, v'_{k\mu}{}^{(n)}$ とでもしたほうがよい．

**) 厳密には，$u'_{k\lambda}$, $v'_{k\mu}{}^{(n)}$ から生成される無限巡回群の非制限直和をとるのである．

***) 同一の k と μ に対し，$v_{k\mu}^{(n)}$ はいくつかあってもよいが，高々有限個．

$p^{n_{k\lambda}-1}u_{k\lambda}$ 全体および $pv_{k\mu}{}^{(1)}=0$ なる $v_{k\mu}{}^{(1)}$ 全体を考えれば，その濃度は $|G_k|$ に等しく，またHで考えた位数がいずれも p である．そこで，ベクトル $w=\langle w_0,\cdots,w_k,\cdots\rangle$ において，各 w_k を上のような諸元（$p^{n_{k\lambda}-1}u_{k\lambda}$ および $v_{k\mu}{}^{(1)}$）の全体にわたり（自由に）動かすなら，ベクトル w は全部で $\mathfrak{r}$ だけ生じ，しかも成分 w_k の“位数有界性”という条件がみたされているから，いずれも J の元である．よって，$|J|\geqq\mathfrak{r}$ なることがわかった．一方 $|J|\leqq\mathfrak{r}$ は明らかだから，等号が成り立つのである．

J は H と同型な部分群 H' を含んでいる．すなわち，J に属するベクトル $w=\langle w_0,\cdots,w_k,\cdots\rangle$ の中で，有限ベクトルとなるもの，すなわち，有限個の成分以外では0になるもの，の全体を H' とするのである．H' と H の同型対応は，対応

$$\langle w_0,w_1,\cdots\rangle\longleftrightarrow w_0+w_1+\cdots$$

により行なわれる．よって，今後 H' を H と同一視しよう．

さて，J の元 $w=\langle w_0,w_1,\cdots\rangle$ が J で無限高度となるための条件は，$w_0=0$ なることである．まず十分性を示すために，$w=\langle 0,w_1,\cdots\rangle$ とし，任意の自然数 n に対し，各 $w_k(k\geqq1)$ はC）により H^{k-1} で無限高度だから，$p^nz_{k-1}=w_k$ なる元 $z_{k-1}\in H^{k-1}$ がとれ，形式的な和 $z_0+z_1+\cdots$ を作ると，z_0, $z_1,\cdots$ が位数有界であり，かつ各 k' につき $u_{k'\lambda}$ も $v_{k'\mu}{}^{(n)}$ もこれらの中に高々有限個しか現われない．（$z_{k-1}\in H^{k-1}$ により，$u_{k'\lambda}, v_{k'\mu}{}^{(n)}$ は $z_{k'+1}$, $z_{k'+2},\cdots$ には現われない．）そこで，$z_0+z_1+\cdots$ を 1°, 2°, 3° で適当に変形して (6·3) の形のものの和 $z_0'+z_1'+\cdots$ に書き直すと，ベクトル $w'=\langle z_0',z_1',\cdots\rangle$ は J の元であり，かつ $p^nw'=w$ となる*)．すなわち w は J で無限高度である．次に，J の元 $w=\langle w_0,w_1,\cdots\rangle$ に w_0 を対応させて，J から H/H^1 の上への準同型写像が得られて，無限高度の J の元は，無限高度の H/H^1 の元に写される．そして，H/H^1 は0以外に無限高度の元を有さない．よって，もし w が無限高度なら，$w_0\in H^1$ で，したがって C）で述べたように，$w_0=0$ でなければならない．

同様にして，帰納法により，一般に J^k は $\langle 0,\cdots,0,w_k,\cdots\rangle$ の形のベクトル全体からなることがわかる．したがって，群 J のウルム型は ω，ウルム列は $[G_k]_{k<\omega}$ と同型である．

---

*) $p^n(z_0'+z_1'+\cdots)=p^n(z_0+z_1+\cdots)=0+w_1+w_2+\cdots$ だからである．

E）次に，剰余群 J/H に目を向けよう．その濃度はやはり $\mathfrak{r}$ である．実際，$|H|=\mathfrak{q}<\mathfrak{p}\leqq|J|=\mathfrak{r}$ であったから，$|J/H|=\mathfrak{t}$ とすると，$\mathfrak{q}\mathfrak{t}=\mathfrak{r}$ で，もし $\mathfrak{t}<\mathfrak{q}$ なら $\mathfrak{q}\mathfrak{t}=\mathfrak{q}<\mathfrak{r}$ で $\mathfrak{q}\mathfrak{t}=\mathfrak{r}$ に反するから，$\mathfrak{t}\geqq\mathfrak{q}$ で，$\mathfrak{q}\mathfrak{t}=\mathfrak{t}=\mathfrak{r}$ となるのである．

群 J/H は可除群である．何故なら，任意のベクトル $w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ を含む剰余類 $w+H$ は，ベクトル $\langle w_0, 0, \cdots\rangle$ が H に含まれることから，無限高度のベクトル $\langle 0, w_1, \cdots\rangle$ を含むからである．

次に，$G/H(J\supseteq G\supseteq H)$ を J/H の任意の可除部分群とする．Gのウルム列もやはり $[G_k]_{k<\omega}$ と同型であることを示すため，G の元 $w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ が G^k に属するための条件が，$w_0=\cdots=w_{k-1}=0$ なることを示そう．必要性のほうは，$J^k\supseteq G^k$ から明らかである．十分性は，k に関する帰納法で証明する*)．$w=\langle 0, \cdots, 0, w_k, \cdots\rangle$ とし，G/H に関する仮定から，任意の自然数 n に対し，$p^n w'\equiv w(\bmod H)$ なる $w'\in G$ がとれる．$w'=\langle w_0', w_1', \cdots\rangle$ と共に，$w''=\langle 0, \cdots, 0, w_k', \cdots\rangle$ もGに属するから，$w=p^n w''+\bar{w}$ なる $\bar{w}\in H$ がとれる．w も w'' も $k-1$ 番目までの成分はみな0だから，$\bar{w}$ もそうで，したがって H^k に属する．ゆえに G^k に属する．そして，帰納法の仮定により $w''\in G^{k-1}$ だから，$w\in G^k$ となるのである．こうして，Gもやはりウルム型 ω，ウルム列 $[G_k]_{k<\omega}$（と同型）の群であることがわかった．

F）補題の証明を完了するため，J の部分群 $G(\supseteq H)$ であって，G/H が可除群であり，かつ $|G/H|=\mathfrak{p}$ なるものをとる．（可除群 J/H をプリューファーの群 $C(p^\infty)$ の直和に分解し，それら $C(p^\infty)$ の濃度 $\mathfrak{p}$ の直和を G/H とすればよい．）すると，$|G/H|=\mathfrak{p}$ と $|H|=\mathfrak{q}$ および $\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}$ から，$|G|=\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ となって，Gが補題で求めていた群であることがわかる．　▮

定理の証明に移る前に，上の証明に関連した次の諸注意を述べておく．

注意 I　ウルム型が有限順序数のときも，補題は成立する．このときは，$|G_k|$ の和も積も，それらの最大のものに一致し，$\mathfrak{p}$ はこれに等しくなければならない．

注意 II　たとえ $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ のときでも，求める群Gを $G\supset H$ なるように適当にとることが，のちに必要となる．まず，$\mathfrak{q}<\mathfrak{r}$ の場合は，E）により $r(J/H)=|J/H|=\mathfrak{r}$ だから，$r(G/H)=\mathfrak{p}$ なるようにGをとれば，F）におけるように

---

*) $k=0$ のときは問題ないから，$k>0$ とし，$k-1$ では正しいとする．

$|G|=\mathfrak{p}$ となる．次に，$\mathfrak{q}=\mathfrak{r}$ の場合は，$\min_{k<\omega}|G_k|=|G_t|$ なる t をとって，$r(G/H)=|G_t|^{\aleph_0}$ なるようにGをとる．(かようにGがとれることは次の問1による．)

この $|G_t|^{\aleph_0}$ を $\mathfrak{p}^*$ と書くと，

$$\mathfrak{p}^*\leqq\prod_{k<\omega}|G_k|=\mathfrak{r}=\mathfrak{q}$$

で，$|G|=|G/H|\,|H|=\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}=\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ となる．かように，$r(G/H)$ が $\mathfrak{p}$ または $\mathfrak{p}^*$ になるようにGをとることにするのである．

問1 上記 G_t につき，不等式 $r(J/H)\geqq|G_t|^{\aleph_0}$ がなり立つ．

注意 III H は J の純粋部分群である．実際，もし $p^nw\,(w\in J)$ が有限ベクトルならば，$w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ とするとき，$p^nw-p^n\langle w_0, 0, \cdots\rangle$ も有限ベクトルで，$\langle 0, w_1', \cdots\rangle$ の形だから，H で無限高度で，$p^nz\,(z\in H)$ の形に表わされる．したがって，p^nw も同様である．

かように，H が J の純粋部分群だから，H はまた G の純粋部分群で，H を法とした各剰余類は，同じ位数の G の元で代表される (2・8 節の定理1)．そこで，注意IIのように，$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ の場合も $r(G/H)=\mathfrak{p}^*$ をみたす G をとり，G/H の位数 p の剰余類のみよりなる極大独立集合 (その濃度は $\mathfrak{p}^*$) から，上のようにGで位数 p の元を代表元にとるならば，群Gは，H を法として独立で，すべて (Gで) 位数が p なる，無限ベクトルの濃度 $\mathfrak{p}^*$ の集合を含むことになる．

注意 IV Gの位数 p の元は，次のようにして判別できる．$pw=0$，$w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle\in G$ とすると，各 w_k は，(6・3) の形の表示において，$v_{k\mu}^{(n)}\,(n>1)$ も，また $pv_{k\mu}^{(1)}=u_{k+1,\lambda}$ なるような $v_{k\mu}^{(1)}$ も含まない．前者を含まないことは明らかだから，後者を含まないことを示そう．もし含んでいたとすると，pw を規定の形に書き直した場合，$k+1$ 番目の成分に $mu_{k+1,\lambda}\,(0<m<p)$ が加わるが，書き直し以前の $k+1$ 番目の成分では $u_{k+1,\lambda}$ の係数は p でわれるから，それに m が加われば，p ではわれない．すなわち $pw=0$ でなくなるのである．

よって，各 w_k は $u_{k\lambda}$ および $pv_{k\mu}^{(1)}=0$ なる $v_{k\mu}^{(1)}$ しか含まない．すなわちベクトル pw では書き直し*) が不要で，したがって $pw=0$ から $pw_k=0$ $(k=0, 1, \cdots)$ が得られる．

---

*) 書き直しには，1°，2°，3° を使っての各成分の中での書き直しもはいるわけだが，それは当然のこととして，ここでは k 成分の $pv_{k\mu}^{(1)}$ を $k+1$ 成分の $u_{k+1,\lambda}$ にかえる操作をさす．

逆に，$pw_k(k\geqq 0)$ がみな0なら，pw は書き直しが不要で，$pw=0$ となる．

定理の証明 3段にわけて行なう．

A) まず，与えられた順序数τを，$\tau=\omega\sigma+r$（σは一つの順序数で，rは有限順序数）と書き表わす（1·1 節の問3）．そして，それに対応して，群の列 $[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$ を，次のように区分して，それぞれω型の列の，整列された列

$$[G_\gamma]_{\omega\rho\leqq\gamma<\omega(\rho+1)} \quad (0\leqq\rho<\sigma) \tag{6·4}$$

と，最後の有限列

$$[G_\gamma]_{\omega\sigma\leqq\gamma<\omega\sigma+r} \tag{6·5}$$

とにわける．$r=0$ のとき，後者はないわけである．

B) 各 $\rho(0\leqq\rho<\sigma)$ につき，ウルム型ωで，ウルム列が (6·4) と同型な群 K_ρ を作り，また $\rho=\sigma$ に対しては，ウルム型rで，ウルム列が (6·5) と同型な群 K_σ を作ろう．そのため，$\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}$ とおき，$0<\rho\leqq\sigma$ に対しては $\mathfrak{p}_\rho=\sum_{\omega\rho\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|$ とおく． また， $0<\rho<\sigma$ に対し $|G_\beta|=\min_{\omega\rho\leqq\gamma<\omega(\rho+1)}|G_\gamma|$ とし，$\rho=\sigma$ のとき $|G_\beta|=\min_{\omega\sigma\leqq\gamma<\tau}|G_\gamma|$ とする．定理の仮定（ii）により，$0<\rho\leqq\sigma$ なるρに対し，

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_\rho=\textstyle\sum_{\omega\rho\leqq\alpha<\beta}|G_\alpha|+\sum_{\beta\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha| &\leqq \textstyle\sum_{\omega\rho\leqq\alpha<\beta}|G_\alpha|+|G_\beta|^{\aleph_0}\\ &=(\textstyle\prod_{\omega\rho\leqq\alpha<\beta}|G_\alpha|)\cdot|G_\beta|^{\aleph_0}\,{}^{*)}\\ &\leqq\textstyle\prod_{\omega\rho\leqq\gamma<\omega(\rho+1)}|G_\gamma|\,{}^{**)}\end{aligned}$$

であり，また $\rho=0$ の場合，定理の仮定（i）から

$$\mathfrak{p}_0\leqq\textstyle\prod_{0\leqq\alpha<\omega}|G_\alpha|$$

である．(τが有限順序数のときはすでにすんでいるから(注意 I)，$\tau\geqq\omega$ としてよい．) よって，補題の条件 a)，b) がみたされている．したがって，$0\leqq\rho<\sigma$ なる各ρに対し，濃度が $\mathfrak{p}_\rho$，ウルム型がω，ウルム列が $[G_{\omega\rho+k}]_{k<\omega}$ と同型な被約 p-群 K_ρ が存在し，また $\rho=\sigma$ に対しては，濃度 $\mathfrak{p}_\sigma$，ウルム型がr，ウルム列が $[G_{\omega\sigma+k}]_{k<r}$ と同型な被約 p-群 K_σ が存在する．

各群 $K_\rho(0\leqq\rho\leqq\sigma)$ で，準基 $[b_{\rho\lambda}, d_{\rho\mu}{}^{(n)}]$ をとるのであるが，その際，K_ρ の基部分群としては，(6·4) または (6·5) の最初の群 $G_{\omega\rho}$ の基部分群 $B_{\omega\rho}$ に対応する部分群 $B_{\omega\rho}'$，すなわち，補題の証明における $[u_{0\lambda}]$ を基とする部分群，

*) βの定義により，αは有限個にわたり動く．そして，無限濃度の有限個の和と積は等しく，それらの中の最大のものに一致する．

**) $\rho=\sigma$ のときは $\omega\rho\leqq\gamma<\tau$ での積をとる．

の中に w_0 をとったベクトル $\langle w_0, 0, \cdots\rangle$ の全体 B_ρ をえらぶことにする.

B_ρ はたしかに K_ρ の基部分群である. まず, $B_\rho \cong B_{\omega\rho}' \cong B_{\omega\rho}$ だから, 巡回群の直和である. 次に, K_ρ^1 は $\langle 0, w_1, \cdots\rangle$ の形のベクトルよりなるから, $B_\rho \cap K_\rho^1 = 0$ である. そして, K_ρ/K_ρ^1 と $G_{\omega\rho}$ との同型対応で, $(B_\rho + K_\rho^1)/K_\rho^1$ が $B_{\omega\rho}$ と対応している. このことからまず,

$$K_\rho/(B_\rho + K_\rho^1) \cong (K_\rho/K_\rho^1)/((B_\rho + K_\rho^1)/K_\rho^1) \cong G_{\omega\rho}/B_{\omega\rho}$$

が可除群となり, それから K_ρ/B_ρ の可除性が導かれる. 実際, K_ρ の任意の元 g は, $g = pg' + b + h (g' \in K_\rho,\ b \in B_\rho,\ h \in K_\rho^1)$ と表わされ, $h = pg'' (g'' \in K_\rho)$ とすると, $g = p(g' + g'') + b$ となるからである. さらに, B_ρ が K_ρ の純粋部分群なることは, $(B_\rho + K_\rho^1)/K_\rho^1$ が K_ρ/K_ρ^1 の純粋部分群なることから導かれる. 実際, $p^n g = b (g \in K_\rho,\ b \in B_\rho)$ とすると, $p^n g + K_\rho^1 = b + K_\rho^1 \in (B_\rho + K_\rho^1)/K_\rho^1$ だから, $b + K_\rho^1 = p^n(b' + h) + K_\rho^1 (b' \in B_\rho, h \in K_\rho^1)$ で, $B_\rho \cap K_\rho^1 = 0$ から容易に $b = p^n b'$ となるのである.

C) 求める群 G は, 次のようにして定義される. 各 $\rho (0 \leqq \rho \leqq \sigma)$ につき, 生成元 $y_{\rho\lambda}$ と $z_{\rho\mu}^{(n)}$ とをそれぞれ $b_{\rho\lambda}$ と $d_{\rho\mu}^{(n)}$ とに対応するようにとり, かつ次の基本関係を与えるのである.

1°. $E(b_{\rho\lambda}) = n_{\rho\lambda}$ なら $p^{n_{\rho\lambda}} y_{\rho\lambda} = 0$

2°. $pz_{\rho\mu}^{(1)} = y_{\varphi\lambda} (\varphi > \rho)$ または 0

3°. K_ρ で,

$$pd_{\rho\mu}^{(n+1)} = d_{\rho\mu}^{(n)} - s_1 b_{\rho\lambda_1} - \cdots - s_l b_{\rho\lambda_l}$$

ならば,

$$pz_{\rho\mu}^{(n+1)} = z_{\rho\mu}^{(n)} - s_1 y_{\rho\lambda_1} - \cdots - s_l y_{\rho\lambda_l}$$

その際, 次のように仮定してよい.

α) 注意 III により, 群 K_ρ は $\mathfrak{p}_\rho^* = |G_\beta|^{\aleph_0} (|G_\beta| = \min_{\omega\rho \leqq \gamma < \omega(\rho+1)} |G_\gamma|)$ なる濃度の, すべて位数 p の元よりなる, H_ρ (補題における H) を法として独立な無限ベクトルの集合 $\mathfrak{a}_\rho$ を含むとしてよい. K_ρ の基部分群 B_ρ の元は, 前述のように $\langle w_0, 0, \cdots\rangle$ の形だから, 有限ベクトルで, $B_\rho \subseteq H_\rho$ である. よって, H_ρ を法として独立な元の集合は, B_ρ を法としても独立である. そこで, $d_{\rho\mu}^{(1)}$ をえらぶ際に, 上のような集合 $\mathfrak{a}_\rho$ をその中に含ませておくことができる. そして, 2° において, $pz_{\rho\mu}^{(1)} = y_{\varphi\lambda}$ とするのは, $\mathfrak{a}_\rho$ に属する $d_{\rho\mu}^{(1)}$ に対応する

$z_{\rho\mu}{}^{(1)}$（の中のあるもの）だけについて行なうのである．

β）$\varphi>\rho$ なる $y_{\varphi\lambda}$ 全部の集合は，（ii）により，濃度が $\mathfrak{p}_\rho{}^*$ をこえない．実際，

$$\sum_{\rho<\varphi} r(B_{\omega\varphi})^{*)} \leqq \sum_{\rho<\varphi}|G_{\omega\varphi}| \leqq \sum_{\beta\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha| \leqq |G_\beta|^{\aleph_0} = \mathfrak{p}_\rho{}^*$$

である**)．（$\omega\rho\leqq\beta<\omega(\rho+1)$ により $\beta<\omega\varphi$ で，中央の≦が得られる．）したがって，2° において，各 ρ につき，すべての $y_{\varphi\lambda}(\varphi>\rho)$ が少なくとも1回現われるとしてよい．

さて，$y_{\rho\lambda}, z_{\rho\mu}{}^{(n)}$ 全部から生成され，1°, 2°, 3° を基本関係とする群 G が，求める群であることを証明しよう．

まず，G が p-群であることは，基本関係から容易に導かれる．

次に，G の任意の元は

$$g = l_1 y_{\rho_1\lambda_1} + \cdots + l_r y_{\rho_r\lambda_r} + m_1 z_{\rho_1'\mu_1}{}^{(n_1)} + \cdots + m_t z_{\rho_t'\mu_t}{}^{(n_t)}$$

の形に表わされる．ここに，(ρ_i, λ_i) はことなる r 個の組で，$0<l_i<p^{n_{\rho_i\lambda_i}}$ であり，(ρ_j', μ_j) もことなる t 個の組で，$0<m_j<p^{n_j}$ かつ $p \nmid m_j$ である．補題の証明のときと全く同様にして，$r+t>0$ のときは $g\neq 0$ なることが示される．したがって上の表示は一意的である．

G の元で，ある K_ρ の位数 p の有限ベクトルに対応するものは，やはり位数 p である．実際，K_ρ の位数 p の元 g に対応する G の元 g' が，位数 p でなくなるのは，g' が $pz_{\rho\mu}{}^{(1)} = y_{\varphi\lambda}$ の形の $z_{\rho\mu}{}^{(1)}$ を実際に含む場合***)，すなわち，g がそのような $z_{\rho\mu}{}^{(1)}$ に対応する $d_{\rho\mu}{}^{(1)}$ を実際に含む場合であるが，かような $d_{\rho\mu}{}^{(1)}$ 全体は，α）により，K_ρ の有限ベクトルの全体 H_ρ を法として独立だから，$g\notin H_\rho$ となるのである．

今，$pz_{\rho\mu}{}^{(1)} = y_{\varphi\lambda}$ とする．$z_{\rho\mu}{}^{(1)}$ に対応する $d_{\rho\mu}{}^{(1)} = \langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ は，α）で述べた集合 $\mathfrak{a}_\rho$ に属するから，位数 p の K_ρ の元で，注意IVにより，$pw_0 = pw_1 = \cdots = 0$ である．$w = \langle 0, \cdots, 0, w_k, w_{k+1}, \cdots\rangle$ とおくと，

$$d_{\rho\mu}{}^{(1)} - w = \langle w_0, \cdots, w_{k-1}, 0, \cdots\rangle$$

は，やはり注意IVにより位数高々 p の有限ベクトルである．よって，w に対応

---

*) $B_\varphi \cong B_{\omega\varphi}$ だから．

**) 注意IIで $\mathfrak{q}<\mathfrak{r}$ の場合，$r(G/H)=\mathfrak{p}$ なる G をとったが，この $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_\rho$ も，$\sum_{\rho<\varphi} rB_{\omega\varphi}) \leqq \sum_{\omega\rho\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha| = \mathfrak{p}_\rho$ を満足する．

***) 実際に含むとは，この場合，$0<x<p$ なる x を係数として含む意．

するGの元をw'とすると，$z_{\rho\mu}{}^{(1)}-w'$は，上で示したように，Gで位数高々pである．ゆえに，$pw'=y_{\varphi\lambda}$となる．一方，wはその形から$K_\rho{}^k$に含まれる．したがって$y_{\varphi\lambda}$はG^kに含まれることになる．ここにkは任意の自然数である．

そこで，$\varphi>0$なる$y_{\varphi\lambda}$をとると，β）により，$pz_{0\mu}{}^{(1)}=y_{\varphi\lambda}$なる$z_{0\mu}{}^{(1)}$が存在するから，上述により$y_{\varphi\lambda}\in G^k(k=1,2,\cdots)$である．したがって，補題の証明C）と同様にして，$z_{\rho\mu}{}^{(n)}(\rho>0)$もすべて$G^k$に含まれる．こうして，$y_{\rho\lambda}$，$z_{\rho\mu}{}^{(n)}(\rho>0)$は$G^\omega$に属することがわかった．したがって$G/G^\omega$が$K_0$と同型で，4･3 節の命題1により，$G$の最初の$\omega$個のウルム列が，ちょうど$G_0,G_1,\cdots,G_k,\cdots$と同型になる．この推理をくり返せば*)，$G$はウルム型$\tau$の被約$p$-群で，ウルム列が$[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$と同型なるものであることがわかる．

最後に，Gの濃度はちょうど$\mathfrak{p}$である．実際，K_0の濃度が$\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}$で，$G/G^\omega\cong K_0$なのだから，$|G|\geqq\mathfrak{p}$である．一方，各$\rho>0$につき，$K_\rho$の濃度$\mathfrak{p}_\rho=\sum_{\omega\rho\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|$は$\sum_{0\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|$をこえず，後者は定理の（i）により$\mathfrak{p}$をこえない．また，$0\leqq\rho\leqq\sigma$なる$\rho$の濃度は，もちろん$\sum_{0\leqq\alpha<\tau}|G_\alpha|$をこえないから，やはり$\mathfrak{p}$をこえない．よって，全部の$K_\rho$の濃度の和も$\mathfrak{p}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$をこえない．したがって，$G$の生成団の濃度が$\mathfrak{p}$をこえず，$|G|=\mathfrak{p}$が結論できるのである．

これで，クリコフの定理の証明が完了した． ▮

6・2 ジッピンの定理とその拡張

最後に，可算p-群およびその直和となる群の場合に，存在条件を明らかにしよう．

可算被約p-群をGとすれば，そのウルム型τは，可算順序数である．（τが可算順序数とは，τより小さい順序数全体の集合が可算集合なることである．）また，Gのウルム列$[G_\alpha]_{0\leqq\alpha<\tau}$の各群$G_\alpha$は，可算群で，0以外に無限高度の元を有さず，$\alpha=\tau-1$の場合以外は非有界である．しかし逆に，クリコフの存在定理から，直ちに次の定理が得られる．

ジッピンの定理（第1形） τを可算順序数とし，各順序数$\alpha(0\leqq\alpha<\tau)$につき，0以外に無限高度の元をもたない可算$p$-群$G_\alpha$が与えられ，$\alpha=\tau-1$の場合以外は$G_\alpha$が非有界であるならば，ウルム型が$\tau$で，ウルム列が$[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$

---

*) 厳密には，ρに関する超限帰納法．

と同型な，可算被約 p-群が存在する．

この定理を，ウルム不変数列を用いていい直して見よう．

G を長さ λ の可算被約 p-群とする．4·2 節の命題1により，$\alpha<\lambda$ なる任意の順序数 α に対し，ウルム不変数 $U_G(\alpha+n)\neq 0$ なる有限順序数 n が存在する．

f を，順序数全体を変数とし，濃度を値にもつ，一つの関数とする．f が**長さ** λ であるとは，$\alpha\geqq\lambda$ なるすべての順序数 α に対し $f(\alpha)=0$ で，かつ，λ がかような最小数になっていることをいう．長さ λ の関数 f が**認容的** (admissible) とは，任意の $\alpha<\lambda$ に対し，$f(\alpha+n)\neq 0$ なる有限順序数 n が存在することをいう．長さ λ の被約 p-群 G のウルム不変数列 $[U_G(\alpha)]_\alpha$ は，長さ λ の認容的関数である．

順序数全体を変数とし，濃度を値にもつ関数 f が**可算**であるとは，その長さが可算順序数で，その値がすべて可算濃度なることをいう．可算被約 p-群のウルム不変数列は，可算関数である．

以上の概念を用いると，ジッピンの定理を次のように述べることができる．

ジッピンの定理（第2形）　f を順序数全体を変数とし，濃度を値にもつ，長さ λ の可算認容的関数とする．すると，長さ λ の可算被約 p-群 G であって，すべての順序数 α に対し $U_G(\alpha)=f(\alpha)$ なる如きものが存在する．

証明　$\lambda=\omega\tau_0+n$（n は有限順序数）と表わし，$n>0$ ならば $\tau=\tau_0+1, n=0$ ならば $\tau=\tau_0$ とおいて，各 $\rho\,(0\leqq\rho<\tau)$ につき，群 G_ρ を，巡回 p-群の直和で，各整数 $i\geqq 0$ につき，その位数 p^{i+1} の直和因子の濃度が $f(\omega\rho+i)$ に等しいように作る．各 G_ρ は，0 以外に無限高度の元を有さぬ可算 p-群となり，また認容的関数の定義から，$\rho=\tau-1$ 以外は非有界である．さらに，λ は可算順序数だから，τ もそうである．よってジッピンの定理の第1形により，ウルム型が τ で，ウルム列が $[G_\alpha]_{\alpha<\tau}$ と同型な，可算被約 p-群 G が存在する．そして，4·3 節の命題3により，$U_G(\alpha)=f(\alpha)$ がすべての順序数 α につき成立する．したがって，G の長さは f の長さ λ に等しいこともわかるのである．　▮

次に，f を可算認容的関数とする．すると，任意の順序数 α に対し，

$$\textstyle\sum_{n<\omega} f(\alpha+n)\geqq\sum_{\beta\geqq\alpha+\omega} f(\beta) \tag{6·6}$$

が成り立つ．実際，fの長さをλとすると，$\lambda \leqq \alpha+\omega$ なるときは，$\beta \geqq \lambda$ なる βにつき $f(\beta)=0$ だから，上の不等式は明らかである．$\lambda > \alpha+\omega$ のときは，認容的関数の定義により，$f(\alpha+n_k) \neq 0$ なる自然数 n_k が無数にとれる．よって，(6·6) の左辺は $\aleph_0$ より小でない．しかし f は可算関数だから，右辺は $\aleph_0$ より大でない．したがって不等式が成り立つのである．

今度は，関数gが可算認容的関数の和であるとすると，(6·6) を加え合わせることにより，任意の順序数αに対し，

$$\sum_{n<\omega} g(\alpha+n) \geqq \sum_{\beta \geqq \alpha+\omega} g(\beta)$$

が成り立ち，またgの長さは，最小の非可算順序数Ωより大でない．もしGが可算被約 p-群の直和ならば，そのウルム不変数 $U_G(\alpha)=g(\alpha)$ は上の不等式をみたすことになり，かつGの長さはΩより大でない．

定理 1 gをすべての順序数を変数とし，濃度を値とする関数とする．任意の順序数αに対し，gが不等式

$$\sum_{n<\omega} g(\alpha+n) \geqq \sum_{\beta \geqq \alpha+\omega} g(\beta) \tag{6·7}$$

を満足し，かつgの長さλがΩをこえないならば，可算被約 p-群の直和となる，長さλの p-群Gであって，すべての順序数αにつき，$U_G(\alpha)=g(\alpha)$ なる如きものが存在する．

証明 gが可算認容的関数の和として表わされることが示されれば，4·2 節の命題2とジッピンの定理（第2形）から，直ちに定理が導かれることになる．

関数 g から，すべての順序数 α により添数づけられた集合列 $[A_\alpha]_\alpha$ を，$\alpha \neq \alpha'$ なら A_α と $A_{\alpha'}$ は共通元を有さず，各 α につき $|A_\alpha|=g(\alpha)$ であるようにとる．

Aをこれらすべての A_α の和算合とする．仮定 (6·7) を用いて，各αにつき，和集合 $\vee_{\beta \geqq \alpha+\omega} A_\beta$ から和集合 $\vee_{n<\omega} A_{\alpha+n}$ の中への一対一写像 ρ_α が存在することがわかる．Aの二元xとyがρ_αを法として合同とは，$\rho_\alpha x=y$ なるか，$\rho_\alpha y=x$ なることと定義し，記号で $x \underset{\alpha}{\sim} y$ と表わす．Aの二元xとyが合同（記号で $x \sim y$）とは，Aに有限個の元の列

$$x=x_1, x_2, \cdots, x_k=y$$

が存在して，

$$x_1 \underset{\alpha_1}{\sim} x_2 \underset{\alpha_2}{\sim} x_3 \underset{\alpha_3}{\sim} \cdots \underset{\alpha_{k-1}}{\sim} x_k \tag{6·8}$$

なる適当な順序数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ がとれることであると定義する．この合同の概念により，Aを類別できて，その類全体の族を $[B_\gamma]_{\gamma\in\Gamma}$ とする．

Γ の各元 γ に対し，すべての順序数 α を変数とし，濃度を値とする関数 f_γ を，$f_\gamma(\alpha)=|B_\gamma \cap A_\alpha|$ により定義する．f_γ が可算認容的関数であることを示そう．

まず，各 B_γ は可算集合である．実際，(6·8) において，x_1 を固定すると，x_2 は可算個しか存在しない．何故なら，$x_1 \in A_\tau$ としよう．もし $\rho_{\alpha_1}x_1=x_2$ ならば，$\alpha_1+\omega \leqq \tau < \Omega$ で，かかる α_1 は可算個しか存在しない．したがって x_2 も同様である．またもし $\rho_{\alpha_1}x_2=x_1$ ならば，$\alpha_1+n=\tau$ となる有限順序数 n が存在する．固定した τ に対し，かような α_1 は有限個しか存在しない．かつ，ρ_{α_1} は一対一写像だから，各 α_1 に対し，$\rho_{\alpha_1}x_2=x_1$ なる x_2 は高々一つしか存在しないのである．こうして，x_2 が可算個しか存在しないことがわかった．同様に，x_2 を固定すると x_3 は可算個しか存在しないから，x_1 を固定し，x_2 を自由に動かしても，x_3 は可算個しかない．以下同様にして，x_k も可算個しか存在せず，$k=1, 2, \cdots$ 全部にわたり加えても，やはり可算個になるのである．よって，濃度 $f_\gamma(\alpha)=|B_\gamma \cap A_\alpha|$ は可算濃度である．

各 $\gamma \in \Gamma$ につき，f_γ の長さを λ_γ とする．g の長さが Ω をこえないから，$\alpha \geqq \Omega$ なる α については A_α は空集合である．よって，$\lambda_\gamma \leqq \Omega$ なることがわかる．

次に，f_γ は認容的関数である．実際，α を λ_γ より小さい任意の順序数とする．長さの定義により，$f_\gamma(\alpha') \neq 0$ なる順序数 $\alpha'(\alpha \leqq \alpha' < \lambda_\gamma)$ が存在する．もしある有限順序数 n に対し $\alpha'=\alpha+n$ となるならば，$f_\gamma(\alpha+n) \neq 0$ となるわけである．そうでないとすると，$\alpha' \geqq \alpha+\omega$ で，$f_\gamma(\alpha') \neq 0$ により空でない集合 $B_\gamma \cap A_{\alpha'}$ から一つの元 x をとると，写像 ρ_α により，x は $A_{\alpha+n}$ のある元 y に写される．ここに n は適当な有限順序数である．したがって，$x \sim y$ となる．x は B_γ の元だから，y も B_γ に含まれ，したがって $y \in B_\gamma \cap A_{\alpha+n}$ となる．ゆえに $f_\gamma(\alpha+n) \neq 0$ で，f_γ は認容的関数なのである．

最後に，λ_γ が可算順序数なることを示そう．$\lambda_\gamma \leqq \Omega$ であったから，可算でないとすると，$\lambda_\gamma=\Omega$ となる．上記認容的関数なることから，$\alpha < \Omega$ なる任意

の順序数αに対し，$f_\gamma(\alpha+n)\neq 0$ なる有限順序数nが存在する．したがって，$\alpha_0<\Omega$ なる任意の極限順序数 α_0 に対し，値の和 $\sum_{n<\omega}f_\gamma(\alpha_0+n)$ は $\aleph_0$ に等しい．ゆえに，全部の値の和 $\sum_{0\leq\alpha<\Omega}f_\gamma(\alpha)=|B_\gamma|$ は，Ωより小さい順序数全体の濃度に等しくなる．しかし，後者は非可算濃度であり，一方 $|B_\gamma|$ は可算濃度である．これは矛盾である．

さて，各f_γが可算認容的関数なることがわかり，任意の順序数αに対し，

$$g(\alpha)=|A_\alpha|=\sum_{\gamma\in\Gamma}|B_\gamma\cap A_\alpha|=\sum_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma(\alpha)$$

であるから，g は f_γ の和で，証明が完結する． ▌

問 の 略 解

第 1 章

1·1 節

問 1 この式が成り立つとし，$c \leqq a$ とすれば，$a \cap (b \cup c) \geqq c$，$a \cup c = a$ で，これらを代入すると，$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$ となる．逆は，$c \leqq b \cup c$ と $c \leqq a \cup c$ にモヂュラー律を適用する．

問 2 S の逆元全部の集合を S' とし，S と S' の和集合 S_0 をとって，まず $|S_0| = |S| = \mathfrak{m}$ を証明せよ．G は S_0 をも生成団とするが，S_0 の k 個の元の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ は，k を固定すると，高々 $|S_0|^k = \mathfrak{m}^k = \mathfrak{m}$ しか存在しない．$k = 1, 2, \cdots$ 全部につきこれらを加える．

問 3 $\alpha = \gamma + n$ (γ は極限数，n は有限順序数) とし，γ より小なる極限数全体のなす整列集合の順序数 σ に対し，$\gamma = \omega\sigma$ となる．

1·4 節

問 2 $G = A + B$ とするとき，A が B-高部分群なることを示せばよい．$A' \supseteq A$，$A' \cap B = 0$ とすれば，命題 5 により，$A' = A + (A' \cap \mathrm{B}) = A$ となる．

第 2 章

2·5 節

問 1 Gを可除群Dの中にはめこむと，GはDの直和因子だから，命題 1 により，または命題 3 により，Gは可除群である．

2·8 節

問 1 $N = \{a + pb\}$ とおくと，$pN = \{pa + p^2b\} = N \cap pG$ である．実際，$g = x(a + pb) = p(ya + zb)$ とすると，$x - py \equiv 0 \pmod{p^c}$ だから，$x \equiv 0 \pmod{p}$ で，$g \in pN$ を得る．しかし $p^c(a + pb) = p^{c+1}b$ は $N \cap p^{c+1}G$ の元であるが，$p^{c+1}N$ には属しない．実際，$p^{c+1}b = p^{c+1}w(a + pb)$ とすると，$p^{c+1}(1 - pw) \equiv 0 \pmod{p^d}$ で，$d \geqq c + 2$ だから，$1 - pw \equiv 0 \pmod{p}$ となって，矛盾である．

第 3 章

3·2 節

問 1 Gが巡回群の直和とし，その直和因子である巡回 p-群のうち，位数 $\leqq p^l$ のも

の全部の直和を $G^{(i)}\,(i=0,1,\cdots)$ とすれば，$G=\cup_i G^{(i)}$で，各 $G^{(i)}$はGの純粋有界部分群だから，高度有界である．逆に，G が高度有界な部分群 $G^{(i)}$ の可算昇列の結びとなり，G の台部分群をPとすると，$P^{(i)}=P\cap G^{(i)}$ も高度有界で，Pはその結びとなる．よってクリコフの定理により，Gは巡回群の直和である．

問 2　Gが巡回群及びプリューファーの群の直和に分解されるとし，後者の直和をDとすれば，$D=p^{\omega}G$ であり，前者の直和を G' とすれば，G' は高度有界の部分群 $G^{(i)}$ の可算昇列の結びとなる．したがって $G=(\cup_i G^{(i)})\cup p^{\omega}G$ である．逆にこのことが成り立ったとすると，$\cup_i G^{(i)}$ の 0 以外の元は高度有限だから，$G=(\cup_i G^{(i)})+p^{\omega}G$ で，したがって $p^{\omega}G$ は可除群である，ゆえにプリューファーの群の直和となる．また $G^{(i)}$は G で高度有界だから，$\cup_i G^{(i)}$ でもそうである．ゆえに問1により $\cup_i G^{(i)}$ は巡回群の直和となる．

第 4 章

4·1 節

問 1　しからざる α,α' の組があったとし，その中で，α' が最小なものの一つをとり，それを γ，γ' とする．もし $\gamma'-1$ が存在すれば，$\gamma\leqq\gamma'-1$ だから，$p^{\gamma}G\supseteq p^{\gamma'-1}G\supseteq p(p^{\gamma'-1}G)=p^{\gamma'}G$ となり，仮定に反する．また γ' が極限数ならば，$p^{\gamma'}G=\cap_{\beta<\gamma'}p^{\beta}G\subseteq p^{\gamma}G$ である．($\gamma<\gamma'$ だから，$p^{\gamma}G$ は $p^{\beta}G$ の一つとして現われる．) これも仮定に反する．

問 2　しからざる $\alpha'(>\alpha)$ があったとし，その最小のものをγとする．$\gamma-1$ が存在すれば，$\gamma-1\geqq\alpha$ だから，$p^{\gamma-1}G=p^{\alpha}G$ で，$p^{\gamma}G=p(p^{\gamma-1}G)=p^{\alpha+1}G=p^{\alpha}G$ となり，仮定に反する．またγが極限数ならば，$p^{\gamma}G=\cap_{\beta<\gamma}p^{\beta}G=(\cap_{0\leq\beta<\alpha}p^{\beta}G)\cap(\cap_{\alpha\leq\beta<\gamma}p^{\beta}G)=(\cap_{0\leq\beta<\alpha}p^{\beta}G)\cap p^{\alpha}G$ で，$\beta<\alpha$ なら $p^{\beta}G\supseteq p^{\alpha}G$ だから，$p^{\gamma}G=p^{\alpha}G$ となって，やはり仮定に反する．

問 3　$H(x)\geqq\alpha+1$ だから，$x\in p(p^{\alpha}G)$ で，$x=px'$, $x'\in p^{\alpha}G$ と表わせる．そして，$H(x')\geqq\alpha$ である．

問 4　前問により，$px'=x, H(x')\geqq\alpha$ なる x' をとる．もし $H(x')>\alpha$ ならば，(iii)により ($x'\neq 0$ だから) $H(x)=H(px')>H(x')>\alpha$ で，$H(x)=\alpha+1$ に反する．

第 6 章

6·1 節

問 1　(6·3) の形のHの位数pの元全体を A_k とし，$|A_k|=|G_k|\geqq|G_i|$ により，各 A_k $(k=0,1,\cdots)$ の中に濃度 $|G_i|$ の部分集合 A_k' をとる．すると，各 $i,j\,(i\leqq j)$ につき，A_i' から A_j' の上への一対一写像 π_{ij} が存在する．次に，$A_0', A_1', \cdots$ からそれぞれ任意に一つずつ元をとって，ベクトル $w=\langle w_0, w_1, \cdots\rangle$ をとれば，Jの元である．これか

ら，元列 $w'=\langle w_0;\ w_0,\ w_1;\ w_0,\ w_1,\ w_2;\ \cdots\rangle$ を作る．これは別に J のベクトルではないが，w の各成分が，w' にはかならず無限回現われている．次に w' から，$w''=\langle\pi_{00}w_0,\ \pi_{01}w_0,\ \pi_{12}w_1,\ \pi_{03}w_0,\ \pi_{14}w_1,\ \pi_{25}w_2,\cdots\rangle$ を作ると，これも J のベクトルである．そして，w'' の同じ番目の成分は，w' の同じ番目の成分から，同じ一対一写像によって得られるから，w' で成分がちがえば，w'' でもちがってくる．したがって，ベクトル w がちがえば，w' で無限に多くの成分がちがうものになり，w'' でも同様である．よって w'' は，H を法としてことなるベクトルになる．w のとり方は $|G_t|^{\aleph_0}$ だけあるから，$r(J/H)=|J/H|\geqq|G_t|^{\aleph_0}$ となるのである．

参考文献*)

[1] Crawley, P.: Abelian p-groups determined by their Ulm sequences, Pacific J. of Math., Vol. 22, 1967, 235～239.

[2] Fuchs, L.: Abelian Groups, 1958, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.**)

[3] Fuchs, L. & Schmidt, E. T. 編 : Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, 1964, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.

[4] Hill, P.: Sums of countable primary groups, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 17, 1966, 1469～1470.

[5] Honda, K.: Realism in the theory of abelian groups, I, Comm. Math. Univ. St. Paul, Vol. 5, 1956, 37～75

[6] Honda, K.: Realism in the theory of abelian groups, III, Comm. Math. Univ. St. Paul, Vol. 12, 1964, 75～111.

[7] Honda, K.: On direct sums of countable, reduced, abelian p-groups, Comm. Math. Univ. St. Paul, Vol. 16, 1967, 157～161.

[8] Irwin, J. M. & Walker, E. A. 編 : Topics in Abelian Groups, 1963, Scott, Foresman and Co.

[9] Kaplansky, I.: Infinite Abelian Groups, 1954, University of Michigan Press.

[10] Kaplansky, I. & Mackey, G. W.: A generalization of Ulm's theorem, Summa Brazil. Math., Vol. 2, 1951, 195～202.

[11] Kolettis, G.: Direct sums of countable groups, Duke Math. J., Vol. 27, 1960, 111～125.

[12] 中山正：集合・位相・代数系，昭和24年，至文堂.

[13] 成田正雄：初等代数学（共立数学講座），昭和41年，共立出版株式会社.

[14] Ulm, H.: Zur Theorie der abzählbar-unendlichen abelchen Gruppe, Math. Ann., Vol. 107, 1933, 774～803.

[15] Walker, E. A.: On n-extensions of Abelian groups, Ann. Univ. Sci. Budapest, Vol. 8, 1965, 71～74.

*) より委しい文献表は，フックス［2］参照．また，最近出たクローシュの“群論”第3版に，1952年以降の概観と文献表がある．なお，この“群論”の第2版（1953）は，吉崎敬夫氏により邦訳（東京図書株式会社）されていて，その第1巻の後半にアーベル群論が解説されている．

**) 同じ書物が Pergamon 書店からも出されている．

代 数 群

永田 雅宜 著

まえがき

1) 代数群の理論は，単に代数幾何学の一分野としての意義だけでなく，一般代数多様体の理論への応用，さらには整数論への応用などの意義をもつ．しかしながら，それら各分野にわたる話題を尽すのには，尨大なページ数と，大変な努力を要する．

本書は，代数群の理論への入門書のつもりで書いた．したがって，代数群についての基本的事項の 説明に重点をおいた．「定義体」も 基本的事項ではあろうが，本書では定義体には触れずにすませた．

話題としては，線型代数群（アフィン代数群）の一般論，特に，Borel 部分群の理論，の紹介に力を注いだ．各章の話題の概略は次のようである．

第 1 章　多様体，代数群の例

第 2 章　群の多様体への有理作用，商空間，剰余類

第 3 章　線型代数群（可解群の構造，Borel 部分群等）

第 4 章　Abel 多様体

なお，代数幾何学についての基本的事項で，本書で利用するものは，第 1 章および第 2 章の初めにまとめて述べた．しかし，証明なしで引用する程には基本的であるかどうかわからないこと（Plücker 座標に関すること）は付録 3 において証明をした．その他，付録 1，付録 2 において，不変元および交換子群についての話題を補足した．

2) 本書の記述において，断りなく

$$e$$

とかくときは，群の単位元を意味するものとする．

3) 参考文献の主なものをあげよう．

線型代数群について基本的なものには，次の二つがある．

［1］ A. Borel, Groupes linéares algébriques, Ann. of Math. 64 (1956).

［2］ C. Chevalley, Classification des groupes de Lie algébriques, École Normale Supérieure, Paris (1958).

また，近年代数群に関するシンポジュームがしばしば開かれており，その報告なども綜合文献として貴重であろう．その第一のものは

［3］ Proceedings of Symposia in pure mathematics, vol. 9, Amer. Math. Soc. (1966).

その他 Strasbourg-Heidelberg でのシンポジューム (1966) の記録も近刊の模様である．

アーベル多様体についての基本的なものには，次の二つがある．

［4］ A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Herman, Paris (1948).

［5］ S. Lang, Abelian varieties, John Wiley, New York (1959).

この他，代数群に関しては，多数の学者がいろいろな研究発表をしている．そのうち主な研究者をアルファベット順にあげると：

I. Barsotti, C. Chevalley, W. L. Chow, A. Grothendieck, J. Igusa, N. Iwahori, S. Lang, T. Matsusaka, H. Morikawa, S. Nakano, M. Nishi, M. Rosenlicht, J.-P. Serre, G. Shimura, J. Tate, J. Tits, A. Weil.

記号表

第 1 章 代 数 群 (1)

この章では，代数群の定義と，その例を述べる．行列から成る代数群の方が，例として理解しやすいので，そのような代数群を考えるのに必要な部分だけを，まずとりあげた．そのため，この章では，代数的集合は，アフィン空間の中だけで考える．一般な場合については，第 2 章でふれる．行列から成る代数群（線型代数群という）については，第 3 章でもっと詳しく考察する．

1·1 アフィン多様体

一般な多様体の定義は第 2 章で一応述べるが，アフィン多様体の概念の素朴な形としての，座標系による定義を述べておこう．この節で述べることは予備知識的なことであるから，この節においては証明は概略しか述べない．

（1） **零点の集合** 体 K の上の n 次元アフィン空間は $\{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in K\}$ とする．これを $\boldsymbol{A}^n(K)$ で示そう．K の上の n 変数の多項式環 $K[X_1, \cdots, X_n]$ の部分集合 I をとったとき，$a=(a_1, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{A}^n(K)$ が I の**零点**であるとは，$\forall f \in I$ について，$f(a)=f(a_1, \cdots, a_n)$ が 0 であるときにいう．I の零点全体を $\boldsymbol{A}^n(K)$ における I の**零点集合**，または I によって定義された（強い意味の）[*] **代数的集合**という．$V(I)$ で示そう．すると次のことは容易にわかる．

定理 1·1·1 I で生成された $K[X_1, \cdots, X_n]$ のイデアルを J とし，J の根基を $\sqrt{J}$ で示せば，$V(I)=V(J)=V(\sqrt{J})$

定理 1·1·2 I, J が $K[X_1, \cdots, X_n]$ のイデアルであれば，

（イ） $V(I \cap J)=V(IJ)=V(I) \cup V(J)$

（ロ） $V(I+J)=V(I) \cap V(J)$

また，次のことは **Hilbert の零点定理**として知られている．

定理 1·1·3 K が代数的閉体であれば，$K[X_1, \cdots, X_n]$ の二つのイデアル

---

[*] "代数的集合"は第 2 章でもう少し一般な意味に変える．それまでは代数的集合は，$V(I)$ の形の集合とする．

I, J について,

$$V(I)=V(J)\Longleftrightarrow\sqrt{I}=\sqrt{J}$$

代数的閉体Ωを固定し，その上のいくつかのアフィン空間内で考察することにする．このようなとき，Ω を**万有体**とよぶ．多項式環 $\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ の素イデアルIの零点集合であるものを，**既約**な（強い意味の）代数的集合，または $A^n(\Omega)$ の中の**アフィン多様体**とよぶ．多項式環のイデアルの準素イデアル分解と，定理 1·1·2〜1·1·3 により，次を得る．

定理 1·1·4 Vが $A^n(\Omega)$ の中の代数的集合であれば有限個のアフィン多様体 $V_1,\cdots,V_m$ で次の性質をもつものがある．（イ）$V=V_1\cup\cdots\cup V_m$，（ロ）$i\neq j$ ならば $V_i\not\subseteq V_j$.

この $V_1,\cdots,V_m$ はVにより（順序の差異を無視すれば）一意的に定まる．これら V_i を Vの**既約成分**という．

（2） **有理函数** $A^n(\Omega)$ の中の代数的集合Vが多項式環 $\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ のイデアルIで定義されたとしよう．$f\in\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ は $a=(a_1,\cdots,a_n)\in A^n(\Omega)$ に対して，$f(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega$ を対応させる，$A^n(\Omega)$ の上で定義され，Ω に値をもつ函数と考えられる．この函数を V 上だけで考えたものを $f(x_1,\cdots,x_n)$ で示そう．すると，$f(X_1,\cdots,X_n)\to f(x_1,\cdots,x_n)$ は $\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ から $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の上への Ω-準同型になり,*) その核が I の根基 $\sqrt{I}$ になる．この環 $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ を V の**座標環**といい，$x_1,\cdots,x_n$ をVの上の**座標函数**という．$\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の元はV 上の**正則な有理函数**とよばれる．V がアフィン多様体であることは，$\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ が整域ということと同値である．このとき，$\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の商体 $\Omega(x_1,\cdots,x_n)$ の元を V の上の**有理函数**といい，$\Omega(x_1,\cdots,x_n)$ をV の**函数体**という．$\operatorname{trans\,deg}_\Omega\Omega(x_1,\cdots,x_n)$ をVの**次元**といい，$\dim V$ で示す．$g\in\Omega(x_1,\cdots,x_n)$ と $a\in V$ とを考える．$g=f(x_1,\cdots,x_n)/h(x_1,\cdots,x_n)$ （$f(x)$, $h(x)\in\Omega[x_1,\cdots,x_n]$）で，さらに $h(a)\neq 0$ であるように表わし得るとき，gはaにおいて**正則**であるという．このときは，$g(a)=f(a)/h(a)$ により，g は a において確定した値をとる．$J=\{f(a)\in\Omega[x_1,\cdots,x_n]\mid f(a)=0\}$ は $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の素イデアルである．aにおいて正

*) 二つの函数の和，積は，値の和，積で定める．$(f_1\times f_2)(a)=(f_1(a))(f_2(a))$，$(f_1+f_2)(a)=f_1(a)+f_2(a)$，$(\forall a\in V)$

則な有理函数全体は商環 $\Omega[x_1,\cdots,x_n]_J$ と一致する．この環を点 a の**局所環**という．g がアフィン多様体 V の部分集合 U の各点で正則であるとき，g は U で**正則**であるという．V で正則な有理函数全体は座標環 $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ と一致する．（このことは，一般に，R が整域であるとき，$\mathfrak{m}$ が R の極大イデアル全体をわたるときの $\cap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ が R と一致することから出る．）このことが，前に述べた，V 上の正則有理函数の定義を正当化する．なお，既約でない代数的集合の**次元**は，既約成分の次元の最大と定める．記号 dim は同様である．既約成分の次元 m が共通のとき，**純** m 次元という．

（3） **正則写像** （$\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の中の）代数的集合 V から（$\boldsymbol{A}^m(\Omega)$ の中の）代数的集合 W の中への写像 φ が次の条件をみたすとき，φ は**正則写像**であるという．

n 個の変数 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ についての多項式 $f_1(X),\cdots,f_m(X)$ が存在して，$b=(b_1,\cdots,b_m)$ が $a=(a_1,\cdots,a_n)$ の φ による像 $\Longleftrightarrow f_i(a_1,\cdots,a_n)=b_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

この条件は次のように述べても同じである．φV を含む最小の代数的集合 V^* をとる．V^* の座標環の元 f について，$f\varphi$ $(f\varphi(a)=f(\varphi a)(\forall a\in V))$ が V の上の正則函数になり，$f\to f\varphi$ は V^* の座標環から V の座標環の中への同型を与える．

φ が正則で，φ が V と W との一対一対応を与え，φ^{-1} も正則写像であるとき，φ は**双正則写像**であるという．

（4） **Zariski 位相** アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ に，代数的集合を閉集合と定めて位相を入れることができる．この位相を **Zariski 位相**という．今後断らない限り，位相は Zariski 位相で考える．[Ω が複素数体の部分体であれば，Euclid 位相も考え得る．Euclid 位相を考えるときは明確にその旨述べる．] $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の部分集合については，部分空間としての位相を考える．Zariski 位相について，特に注意すべき点は

（イ） 閉集合について，極小条件が成り立つ．（これは，代数的集合が多項式環 $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ のイデアルで定義されることと，$\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ におけるイデアルについての極大条件の成立とから出る．）したがって，Zariski 位相に関しては，$\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の部分集合はコンパクト空間である（（ロ）参照）．

(ロ) Vがアフィン多様体，U, U' がVの空でない開集合ならば，$U\cap U'$ はまた空でない開集合である（定理 1·1·2 (イ) を利用）．したがって，さらに $\dim V\geqq 1$ であれば V は T_1 空間ではない（$V-U$ のどの既約成分の次元も $<\dim V$ に注意せよ）．

(ハ) 各 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in \boldsymbol{A}^n(\Omega)$ を $(a_1,\cdots,a_n,0,\cdots,0)\in \boldsymbol{A}^m(\Omega)$ $(m\geqq n)$ に対応させれば，一対一対応を得る．この写像をφで示せば，φ は $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ と $\varphi(\boldsymbol{A}^n(\Omega))$ との双正則写像である．他方，一般に，V, V' がアフィン多様体で，φ が V から V' への双正則写像であれば，φ は同相写像である．

問 1 Ω が複素数体であるとき，$\mathbf{A}^n(\Omega)$ の (Zariski 位相による)閉集合は，Euclid 位相による閉集合であることを示し，また，Euclid 位相による閉集合で (Zariski 位相による) 閉集合でないものの例を一つあげよ．

(5) **直積** $X\subseteq \boldsymbol{A}^n(\Omega)$, $Y\subseteq \boldsymbol{A}^m(\Omega)$ であるとき，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in Y$ の組に対して，$(x,y)=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\in \boldsymbol{A}^{n+m}(\Omega)$ を対応させる．この (x, y) を x, y の**直積**といい，(x, y) または $x\times y$ で示す．$\{(x, y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$ を X と Y との**直積**といい，$X\times Y$ で示す．

定理 1·1·5 上で，X, Y が代数的集合ならば，$X\times Y$ も $\boldsymbol{A}^{n+m}(\Omega)$ の中の代数的集合である X, Y がアフィン多様体であれば，$X\times Y$ もアフィン多様体である．

証明 前半: $\Omega[X_1,\cdots,X_n]$, $\Omega[Y_1,\cdots,Y_m]$ において X, Y を定義するイデアルを I, J とすると，$X\times Y$ は $n+m$ 変数の多項式環 $\Omega[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]$ において，I, J で生成されたイデアル I^* によって定義されることによる．後半: 上で，I, J が素イデアルならば I^* も素イデアルであること（正則拡大の性質）*) による． ∎

ここで注意すべきことは，$X\times Y$ の位相は，位相空間としての X, Y の積空間としての位相とは異なることである．

問 2 X, Y の閉部分集合 F, F' をそれぞれとれば，$F\times F'$ は $X\times Y$ の閉部分集合である．

問 3 $\boldsymbol{A}^n(\Omega)\times \boldsymbol{A}^n(\Omega)$ $(n\geqslant 1)$ の部分集合 $\Delta=\{(a,a)\mid a\in \boldsymbol{A}^n(\Omega)\}$ を考える．これは

---

*) 次の二つの，可換体論についての定理：
1. 代数的閉体Kの拡大体Lを考えれば，LはKの正則拡大体である．
2. L, L' が体Kの正則拡大，Kを含む L, L' の部分環 R, R' を考えれば，$R\otimes_K R'$ は整域である．

$A^n(\Omega)\times A^n(\Omega)$ の閉集合であるが，積空間としての位相では閉集合にならない．

（6） **正則写像による像** φ が代数的集合 V から代数的集合 W の中への正則写像であるとする．φV の閉包を V^* とする．

定理 1·1·6 上で，Vが既約ならば，V^* も既約であり，φV はV^* の空でない開集合を含む．（したがって，$V^*-\varphi V$の閉包の各成分の次元 $<\dim V^*$）．ゆえに，一般のときも，φV は V^* の各既約成分の空でない開集合を含む．$^\exists U$（V の空でない開集合），$^\forall x\in U$，$\dim\varphi^{-1}(x)=\dim V-\dim V^*$．

証明 V が既約のとき，V^* が既約であることは，（V^* の座標環）$\subseteq$（Vの座標環）＝整域 から明白． φV が V^* の空でない開集合を含むことと，最後のことの証明は，他の成書にゆずる． ▮

定理 1·1·7 上の記号の下で，正則写像φは（位相空間の間の写像として）連続である．

証明 座標環の対応（(3) 参照）と開集合の定義とにより明白． ▮

（7） **連結性** $A^n(\Omega)$ の閉集合 V について，空でない閉集合 W_1，W_2 で，$V=W_1\cup W_2$，$W_1\cap W_2=$空，なるものがあるとき，V は**非連結**であるといい，そうでないとき，Vは**連結**であるという．V の既約成分を $V_1,\cdots,V_m$ とすれば，

定理 1·1·8 Vが連結$\Longleftrightarrow m=1$ であるか，または，$1, 2,\cdots m$ の適当な置換 π（ただし $\pi 1=1$）により，各 $j=2,\cdots,m$ について，

$$(V_{\pi 1}\cup\cdots\cup V_{\pi(j-1)})\cap V_{\pi j}\neq\text{空}.$$

（8） **代数的集合の結** V, W_1, W_2 が代数的集合で，V から W_i の中への正則写像 φ_i $(i=1,2)$ があるとする．$\varphi_i V$ の（W_i における）閉包を $V_i{}^*$ とする．このとき，$V_i{}^*$ の座標環 $\Omega[x_{i1},\cdots,x_{im_i}]$ から V の座標環 R の中への同型 σ_i がある（(3) 参照）．Ωの上に $\sigma_i x_{ij}$ 全体で生成されたRの部分環をSとする．すると S を座標環にもつ代数的集合 U がある．この U を $V_1{}^*$ と $V_2{}^*$ との**結**という．

$\sigma_i(\Omega[x_{i1},\cdots,x_{im_i}])\subseteq S\subseteq R$ ゆえ，VからUの中への，およびUから $V_i{}^*$ の中への正則写像 ψ,η_i が自然に定まる．（U の定まり方は，座標環が定まっているのだから，双正則の意味で一意的，すなわち，他の同様な U' をとれば，U と U' とは双正則．）

定理 1·1·9 $\varphi_i=\eta_i\psi$ である．もしも $\varphi_i V_i=V_i^*$ $(i=1, 2)$ であれば，

$$\psi V=U, \qquad \eta_i U=V_i^*.$$

証明は，座標環の極大イデアルと点との対応を考えれば容易である．

1·2 代数群の定義 (1)

代数群の定義は，本当は，もっと一般な代数多様体の定義を終えてからすべきであるが，前節で定義を述べたことがらを知っていれば，代数群の特別な場合と，その例とが述べられるので，一応代数群の定義を述べよう．(一般な場合には，ここに述べる代数的集合の概念がもっと一般になるのである．)

代数的集合 G に算法が定義されていて，G が群であり，その群としての算法が，次の二条件をみたすとき，G は**代数群**であるという．

(イ) 直積 $G\times G$ から G の中への写像 φ を $\varphi(a, b)=ab$ (右辺は群としての算法による積) によって定めると，φ は正則写像である．

(ロ) G から G の上への写像 ψ を $\psi a=a^{-1}$ によって定めれば，ψ は正則写像である．

たとえば，**一般線型群** $GL(n, \Omega)$，すなわち，Ω に成分をもち，行列式が 0 でない n 次正方行列全体のなす群を考えよう．$a=(a_{ij})\in GL(n,\Omega)$ を $A^{n^2+1}(\Omega)$ の点 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn}, (\det a)^{-1})$ ($\det a$ は a の行列式) と考える．(各 $a\in GL(n,\Omega)$ に対して，上のような $A^{n^2+1}(\Omega)$ の点が一意的に定まり，その対応は一対一であるから，このように考えてよい．) すると，$GL(n, \Omega)$ に，$A^{n^2+1}(\Omega)$ の中で，$X_{n^2+1}\cdot\det(X_{ij})-1$ (ただし，$X_{ij}=X_{(i-1)n+j}$; $i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, n$) によって定まる代数的集合になる．$a=(a_{ij})\in GL(n, \Omega)$，$b=(b_{ij})\in GL(n, \Omega)$，$c=ab=(c_{ij})$ のとき，$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ であり，$\det c=(\det a)(\det b)$ であるから，$GL(n, \Omega)$ の算法は上の (イ) の条件をみたす．$a^{-1}=(d_{ij})$ とすると，$(\det a)d_{ij}$ が a_{ji} の余因子であり，$(\det a)^{-1}$ が第 n^2+1 座標であることから，上の (ロ) の条件もみたされることもわかる．したがって，

定理 1·2·1 $GL(n,\Omega)$ は代数群である．

問 1 次にあげる，$GL(n,\Omega)$ の部分群は，いずれも既約な代数群であることをたしかめよ．

（イ）　**特殊線型群**　$SL(n,\Omega)$ すなわち，$\{a\in GL(n,\Omega)\mid \det a=1\}$.

（ロ）　**対角型行列群**　$D(n)=\{GL(n,\ \Omega)$ の対角行列全体$\}=\{(a_{ij})\in GL(n,\Omega)\mid i\neq j$ ならば $a_{ij}=0\}$

（ハ）　**(上半)三角行列群**　$T(n)=\{(a_{ij})\in GL(n,\Omega)\mid i>j$ ならば $a_{ij}=0\}$

（ニ）　$U(n)=\{(a_{ij})\in GL(n,\Omega)\mid i>j$ ならば $a_{ij}=0$; $i=j$ ならば $a_{ij}=1\}$

問 2　上の記号の下で，$\dim GL(n,\ \Omega)=n^2$, $\dim SL(n,\ \Omega)=n^2-1$, $\dim D(n)=n$, $\dim T(n)=n(n+1)/2$, $\dim U(n)=n(n-1)/2$.

さて，代数群の定義についての注意をつけ加えよう.

定理 1・2・2　G が代数群，$a\in G$ であるとき，次のように定めた，G から Gの中への写像 r_a, l_a は，いずれも双正則写像である.

$$r_a x=xa\ \ (^\forall x\in G)$$
$$l_a x=ax\ \ (^\forall x\in G).$$

証明　$r_a x$ は $x\rightarrow xa$. xa の座標は x の座標と a の座標との整式 $f_i(x,\ a)$ で表わされる．a の座標$\in\Omega$ ゆえ，$f_i(x,\ a)$ は x の座標についての整式である．ゆえに r_a は正則写像 $r_{a^{-1}}$ は r_a の逆写像であり，それも（$a^{-1}\in G$ ゆえ）正則写像．したがって，r_a は双正則写像である．l_a についても同様である．　▌

問 3　$G=GL(n,\Omega)$ であるとき，上の $f_i(x,a)$ はどんな整式になるか.

定理 1・2・3　G が代数群であるとき，定義の（ロ）における写像 ψ: $a\rightarrow a^{-1}$ は双正則写像である.

証明は，前定理の証明にならって，各自試みよ.

上の定理 1・2・2 を利用すると，次の大切な結果が出る.

定理 1・2・4　G が代数群であるとき，単位元 e を含む G の既約成分 G_0 は唯一つであり，G_0 は正規部分群で，G の既約成分は G_0a の形である．したがって，V, W が G の互に異なる既約成分であれば，$V\cap W=$空.

証明　最後のことから，まず証明しよう．G の既約成分を $V_1,\cdots,V_s$ $(i\neq j\Rightarrow V_i\neq V_j)$ とする．たとえば，$a\in V_1\cap V_2$ としてみよう．$V_1\cap V_j$ $(j>1)$ は V_1 の閉集合で V_1 と異なるから，前節（4）の（ロ）により，$^\exists b\in V_1$, $b\notin V_j$ $(^\forall j>1)$. $c=a^{-1}b$ とおく．写像 r_c: $x\rightarrow xc$ を考える．定理 1・2・2 により，r_c は双正則写像である．r_c によって，a は b にうつる．したがって，a を含む既約成分の数と，b を含む既約成分の数とは一致しなく

てはならない.*) a は二つ以上の既約成分に入っており，b は唯一つの既約成分に入っているようにえらんであったから，矛盾である．したがって，最後のことがいえた．したがって，G_0 の一意性は明白である．$G_0^*=\{a^{-1}b \mid a, b\in G_0\}$ を考えよう．定義により，これは $G_0\times G_0$ の正則写像による像である．したがって，G_0^* を含む最小の代数的集合 $\bar{G}_0^*$ をとれば，それは既約（前節 (3)）である．$G_0\ni e$ ゆえ，$G_0^*\supseteq G_0$．$\therefore G_0\subseteq G_0^*\subseteq G$ $\therefore G_0\subseteq G_0^*\subseteq \bar{G}_0^*\subseteq G$．$G_0$ は G の既約成分ゆえ，$G_0=\bar{G}_0^*$ $\therefore G_0=G_0^*$．ゆえに G_0 は部分群である．$c\in G$ のとき，$c^{-1}G_0c$ を考える．r_c, $l_{c^{-1}}$ が，ともに双正則写像であるから，$c^{-1}G_0c$ も G の既約成分である．ところが，$e\in c^{-1}G_0c$ は明白ゆえ，G_0 の一意性により，$c^{-1}G_0c=G_0$．ゆえに，G_0 は G の正規部分群である．$a\in G$ のとき，a を含む既約成分は唯一つであり，G_0a は a を含む既約成分であるから，G の既約成分は G_0a の形である． ∎

問4 代数群 G の次元が d であれば，G は純 d 次元である．

上の定理は，代数群については，連結であることと，既約であることとが同値であることを示している．このようなとき，習慣上，代数群は**連結**であるという．

定理 1·2·5 G_1, G_2 が代数群であるとき，$G_1\times G_2$ は自然に代数群である．($G_1\times G_2$ は，代数的集合としての積に，群の直積としての算法を入れる．)

証明は各自試みよ．

1·3 部 分 群

G が代数群であるとき，G の単なる群としての部分群は必ずしも代数群ではない．H が G の**部分代数群**であるとは，H が G に含まれる代数的集合であって，しかも G の部分群であるときにいう．

定理 1·3·1 G が代数群，H が部分群であるとき，H の閉包，すなわち，H を含む最小の代数的集合 H^* は部分代数群である．

証明 H^* が部分群であることを示せばよい．$^\forall h\in H$ を右からかけること

*) G の座標環 $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ を考えると，高さ0の素イデアルと既約成分とが一対一に対応する．a, b に対応する極大イデアルを $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$ とすれば，(a を含む既約成分の数)=($\mathfrak{m}_a$ に含まれる高さ0の素イデアルの数）であり，b についても同様．他方，r_c は $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の自己同型をひきおこし，それにより $\mathfrak{m}_a$ が $\mathfrak{m}_b$ にうつる．

により得られる写像 r_h は G から G 自身の上への双正則写像であり，$r_hH=H$ ゆえ，$r_hH^*=H^*$ である．∴ $H^*H=H^*$．特に，a^*（$\in H^*$）を左からかけることにより得られる写像 l_{a^*} を考えれば，$l_{a^*}H\subseteq H^*$．$l_{a^*}H$ を含む最小の閉集合は $l_{a^*}H^*$ である（l_{a^*} が双正則写像，したがって，同相写像であるから）．ゆえに，$a^*H^*\subseteq H^*$．∴ $H^*H^*\subseteq H^*$．$\{h^{-1}|h\in H\}=H$ であることと，ψ: $x\to x^{-1}$ が同相写像であることから，H^* の元の逆元は H^* の元である．ゆえに，H^* は部分群である．▮

定理 1・3・2 G が代数群，S がその部分集合であるとき，S の G における**中心化群**

$$Z_G(S)=\{a\in G|\ as=sa\ (^\forall s\in S)\}$$

は G の部分代数群である．

S がさらに G の閉集合であれば，S の G における**正規化群** $N_G(S)=\{g\in G|\ gS=Sg\}$ および，**固定化群** $\{g\in G|\ gS=S\}$ は共に代数群である．

証明 一つの $s\in S$ を固定したとき，$a\in G$ とについての条件 $as=sa$ は a の座標についての関係式で表わし得る（x, $y\in G$ について，その積 xy の座標が（$f_1(x,\ y),\cdots,\ f_m(x,\ y)$）となるように多項式 f_i が定まっていれば，$f_i(a,s)=f_i(s,a)$（$i=1,\ 2,\cdots,\ m$）が条件であるから）．したがって，$Z_G(s)$ は代数的集合である．$Z_G(S)=\cap_{s\in S}Z_G(s)$ ゆえ，$Z_G(S)$ も代数的集合である．これが群であることは群論において周知のことであるから，$Z_G(S)$ が部分代数群であることがわかる．あとの二つの群については，2・3 節でもう少し一般なことについて同じ証明をくりかえすことになるので，2・3 節（定理 2・3・5 のすぐあと）で証明することにする．▮

系 1・3・3 代数群 G の中心は G の部分代数群である．

証明 中心は，$Z_G(G)$ である．▮

系 1・3・4 定理 1・3・1 において，H が可換群であれば H^* も可換群である．

証明 $H\subseteq Z_G(H)$．∴ $H^*\subseteq Z_G(H)$．このことは H が H^* の中心 $Z_{H^*}(H^*)$ に含まれていることを意味する．$Z_{H^*}(H^*)$ が代数的集合ゆえ，$H^*\subseteq Z_{H^*}(H^*)$．∴ $H^*=Z_{H^*}(H^*)$．▮

問 1 定理 1・3・1 において，H が G の正規部分群であれば，H^* も G の正規部分群である．

定理 1·3·5 代数群 G の部分群 H について，H の閉包 H^* をとる．H^* に含まれる代数的集合 F で，$H^*-H\subseteq F\neq H^*$ なるものがあれば，$H=H^*$ である．

証明 H^* は群であるから，H^*/H の代表系 $\{a_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)\}$ をとれば，$H^*=\cup Ha_\lambda$; $\lambda\neq\mu \Rightarrow Ha_\lambda\cap Ha_\mu=$空．

（イ） H^* が連結のとき：H は H^* の空でない開集合を含むから，各 Ha_λ もそうである．H^* が既約ゆえ $Ha_\lambda\cap H\neq$空（1·1 節，(4)，(ロ))．$\therefore$ $Ha_\lambda=H$ $(\forall a_\lambda)$．$\therefore$ $H^*=H$.

（ロ） H^* が連結でないとき：H^*の単位元 e を含む既約成分を H_0^* とする．（i） $F\supseteq H_0^*$ でないならば，$H_0^*\cap H$ に（イ）の場合が利用でき，$H\supseteq H_0^*$ $\therefore$ $H=\cup_{a\in H} H_0^*a$．これは H^* の閉部分集合ゆえ，H は代数的集合．$\therefore$ $H^*=H$.（ii）つぎに，$F\supseteq H_0^*$ と仮定しよう．$H_0^*a^*\not\subseteq F$ なる $a^*\in H^*$ がある．$H_0^*a^*\cap H\neq$空 $(H^*-F\subseteq H$ ゆえ)．$a_1\in H\cap H_0^*a^*$ とすると，$H_0^*a^*=H_0^*a_1$．$\therefore$ $H_0^*a_1\not\subseteq F$．$F_1=Fa_1^{-1}$ とおけば，$H_0^*\not\subseteq F_1$．他方，$H^*-H\subseteq F$ ゆえ，$H^*-H=(H^*-H)a_1^{-1}\subseteq Fa_1^{-1}=F_1$．ゆえに，（i）により，$H^*=H$.　▌

定理 1·3·6 代数群 G の代数的部分集合 S が連結であり，しかも単位元 e を含むものとする．S の部分集合 S' が，次の性質をもつものとする：

　　S の任意の既約成分 S_i の空でない開集合を含む．

このとき S' で生成された G の部分群 H は連結な代数群である．したがって，H は S で生成された部分群とも一致する．

証明 S の既約成分を $S_1,\cdots,S_t$ とする．$S_1\ni e$ としてよい．t についての帰納法を利用する．

（イ） $t=1$ のとき：$S_1^*=\{a^{-1}|\ a\in S_1\}$ とおく．直積 $F_1=S_1\times S_1^*$，$F_2=F_1\times F_1,\cdots,F_s=F_{s-1}\times F_1,\cdots$ を考える．G において，ψ: $x\to x^{-1}$ が双正則写像であるから，S_1^* は既約な代数的集合，したがって F_s は既約な代数的集合．($G\subseteq A^n(\Omega)$ ならば，$F_s\subseteq A^{2sn}(\Omega)$)．$S_1''=\{a^{-1}|\ a\in S_1'\}$，$F_1'=S_1'\times S_1''$，$F_2=F_1'\times F_1',\cdots,F_s'=F_{s-1}'\times F_1',\cdots$ とおくと，F_s' は F_s の空でない開集合を含む．F_s から G の中への写像 ϕ_s を，$\phi_s(a_1, a_2^{-1}, a_3, a_4^{-1},\cdots,a_{2s-1},a_{2s}^{-1})=a_1a_2^{-1}\cdots a_{2s-1}a_{2s}^{-1}$ $(a_i\in S_i)$ によって定義すると，代数群の定義によって，

ϕ_s は正則写像である.*) ゆえに定理 1・1・6 により, φF_s の閉包 H_s をとれば, H_s は既約な代数的集合で $\varphi F_s'$ は H_s の空でない開集合を含む. $S_1 \ni e$ ゆえ, $\varphi F_1 \ni e$. また $\varphi F_s = (\varphi F_{s-1})(\varphi F_1)$. ゆえに $\varphi F_1 \subseteq \varphi F_2 \subseteq \cdots \subseteq \varphi F_s \subseteq \cdots$. $\therefore\ H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_s \subseteq \cdots$. $\therefore\ \dim H_1 \leq \dim H_2 \leq \cdots \leq \dim H_s \leq \cdots$. $\dim G$ が有限ゆえ, $\exists m$, $\dim H_m = \dim H_{m+1} = \cdots$. 各 H_s が既約であるから, $H_m = H_{m+1} = \cdots$. 他方 $b \in \varphi F_s \Rightarrow b = a_1 a_2^{-1}, \cdots, a_{2s-1} a_{2s}^{-1}$ $(a_i \in S_1) \Rightarrow b^{-1} = a_{2s} a_{2s-1}^{-1} \cdots a_2 a_1^{-1} \in \varphi F_s$. したがって, さらに $c \in \varphi F_u \Rightarrow b^{-1} c \in (\varphi F_s)(\varphi F_u) \subseteq \varphi F_{s+u}$. $\therefore\ \cup_s \varphi F_s = (S_1$ で生成された部分群$) \supseteq H$. $\therefore\ H_m \supseteq H \supseteq \varphi F_m' \supseteq (H_m$ の空でない開集合$)$. ゆえに定理 1・3・5 により, $H = H_m$.

(ロ) $t > 1$ のとき: $S_1 \cup \cdots \cup S_{t-1}$ が連結であると仮定してよい ($S_2, \cdots, S_t$ の番号を適当に変えればよい). 帰納法の仮定により, $S' \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{t-1})$ で生成された部分群 T は連結である. $S_t \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{t-1}) \ni a_0$ とすると, $a_0 \in T$. H は T と $S' \cap S_t$ とで生成される. $a_0 \in T$ ゆえ, H はTと $S^{**} = (S' \cap S_t) a_0^{-1}$ とで生成される. $S_t a_0^{-1} \ni e$ ゆえ, S^{**} で生成した部分群Uは連結である($t=1$ のときによる). すると, H はTとUとで生成される. TU の閉包Wをとれば, 定理 1・1・6 により W は既約であって, $TU \supseteq (W$ の空でない開集合$)$. そこで, $t=1$ のときと $H = (T$ とU とで生成された部分群$) = (TU$ で生成された部分群$)$ とにより, H は連結な代数群である. ▮

注意 上の定理で, $S \ni e$ の仮定をやめると, H は代数群になるとは限らない. 例えば, $GL(2, C)$ (C=複素数体) において, $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$とすれば, $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| z \text{ は有理整数}\right\}$となり, $(H\text{の閉包}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| z \in C\right\} \neq H$.

系 1・3・7 代数群Gの部分群Hと, Gに含まれる既約な代数的集合 V とについて, H が V の空でない開集合を含めば, H は V を含む.

証明 $H \cap V \ni a$ をとる. $Va^{-1} \ni e$ であり, Hは Va^{-1} の空でない開集合を含む. $\therefore\ H \supseteq (H \cap Va^{-1}$ によって生成された部分群$) = (Va^{-1}$ によって生成された部分群$) \supseteq V$. ▮

系 1・3・8 代数群Gの部分集合を要素にもつ集合 $\mathcal{F}$ について, 次の条件が

*) 正則写像の定義から明らかなように, φが代数的集合Vから Wの中への正則写像, V' が Vに含まれる代数的集合であるとき, φ を V' に制限したものは, V' からWの中への正則写像である. このことを, $V = G \times \cdots \times G$ (2s 個), $W = G$, $V' = F_s$ のときに利用.

成り立つものとする：

（イ） $F\in\mathfrak{F}\Rightarrow F$ の閉包 F^* は既約で，F は F^* の空でない開集合を含む．

（ロ） 各 $F\in\mathfrak{F}$ に対して，有限個の $F_1,\cdots,F_n\in\mathfrak{F}$ が存在して，

$F\cup F_1\cup\cdots\cup F_n$ の閉包は連結であり，単位元を含む．

このとき，$\mathfrak{F}$ の要素全体の和集合で生成された部分群 H は連結である．

証明 Hに含まれる連結な代数群のうちには最大なものがある［H_1, H_2 が連結な部分代数群 $\Rightarrow$（$H_1\cup H_2$ は連結かつ e を含むから）$H_1\cup H_2$ で生成された部分群も連結な代数群］．それを H_0 とすると，（ロ）と定理 1·3·6 とにより，H_0 は $\mathfrak{F}$ の任意の要素Fを含む．∴ $H=H_0$. ▌

次に，有限正規部分群についても，次のことを加えよう．

定理 1·3·9 Gが連結代数群，Nが有限個の元から成る正規部分群であれば，NはGの中心 $Z_G(G)$ に含まれる．

証明 $a\in N$ を固定し，$G\ni g\overset{\varphi}{\rightarrow}g^{-1}ag\in N$ なる写像を考える．これは正則写像．Gが既約ゆえ，φG の閉包は既約（定理 1·1·6）．しかし，Nが有限集合ゆえ，φG も有限集合，ゆえに，φG は一点から成る．∴ $\varphi G=\{a\}$．ゆえに $a\in Z_G(G)$. ▌

問 2 代数群Hが代数群Gに正規部分群として含まれているとき，単位元を含む，Hの既約成分 H_0 をとれば，H_0 もGの正規部分群である．

1·4 交 換 子 群

Gが群，H, K がその部分集合であるとき，Hの元とKの元との交換子全体 $\{h^{-1}k^{-1}hk\mid h\in H, k\in K\}$ で生成された部分群をHとKとの**交換子群**という．$[H, K]$ で示そう．

定理 1·4·1 上の記号の下で，（イ）Gが代数群，（ロ）Hが連結な代数的集合で，さらに，（ハ）$\forall k\in K$ に対して，$\exists h\in H$, $hk=kh$ ならば，$[H, K]$ は連結な部分代数群である．

証明 各 $k\in K$ に対して，$F_k=\{h^{-1}k^{-1}hk\mid h\in H\}$ とおく．$H\ni h$ に対して，$h^{-1}k^{-1}hk$ を対応させるHからGの中への写像は，正則写像であるから，定理 1·1·6 により，F_k の閉包 $F_k{}^*$ は連結であり，F_k は $F_k{}^*$ の空でない開集合を含む．他方（ハ）により $e\in F_k{}^*$．ゆえに，系 1·3·8 により，これら F_k 全

体（k は K の元全体を動く）で生成された部分群 H^* は連結である．$H^*=[H, K]$ は明白であり，定理の証明ができた．▌

問 1　代数群 G の部分集合 H, K について，H が連結な代数的集合で，単位元を含めば，交換子群 $[H, K]$ は連結な代数群である．

系 1・4・2　G が連結な代数群であるとき，$G=G_0=H_0$ から出発して，$G_i=[G_{i-1}, G_{i-1}]$，$H_i=[G, H_{i-1}]$ $(i=1, 2, \cdots)$ と定義すれば，各 G_i，H_i はすべて連結な正規部分代数群である．

証明　i についての帰納法を利用すれば，次の系から容易．

系 1・4・3　代数群 G の正規部分群 H, K について，その一方が連結であれば，交換子群 $[H, K]$ は連結な正規部分群である．

証明　定理 1・4・1 により明白．▌

もっと一般に，代数群 G の部分代数群 H, K の交換子群 $[H, K]$ は代数群であろうか，という疑問がすぐ起こるであろう．答は否定的である．このことに関しては，次の二つの定理が成り立つ．

定理 1・4・4　代数群 G の部分代数群 H, K について，$H=H_0h_1\cup H_0h_2\cup\cdots\cup H_0h_s$，$K=K_0k_1\cup\cdots\cup K_0k_t$；$H_0$，$K_0$ は H, K の e を含む既約成分，$h_1=k_1=e$ とすると，H, K の交換子群 $[H, K]$ は適当な連結部分代数群 M と $\{h_i^{-1}k_j^{-1}h_ik_j \mid i=2, \cdots s;\ j=2, \cdots, t\}$ とによって生成される．

定理 1・4・5　代数群 G の部分代数群 H, K について，次の二条件は互に同値である．

（イ）　H と K とで生成された部分群が代数群になる

（ロ）　交換子群 $[H, K]$ が代数群である．

この二定理は，本書で後に扱う内容に関しては，大体利用せずにすますこともできるという理由と，定理 1・4・5 の証明はむつかしいという理由から，定理 1・4・5 は巻末の付録にゆずって，ここでは定理 1・4・4 の証明だけをしよう．$T_{ij}=\{(h_0h_i)^{-1}(k_0k_j)^{-1}(h_0h_i)(k_0k_j) \mid h_0\in H_0,\ k_0\in K_0\}$ とおけば，$[H, K]$ がこれら T_{ij} 全体で生成されることは明白である．$T_{ij}^*=T_{ij}(h_i^{-1}k_j^{-1}h_ik_j)^{-1}$ とおくと T_{ij}^* は単位元 e を含む．$T_{ij}\ni h_i^{-1}k_j^{-1}h_ik_j$ ゆえ，$[H, K]\supseteq T_{ij}^*$ であり，$[H, K]$ は T_{ij}^* 全体と，$h_i^{-1}k_j^{-1}h_ik_j$ 全体とで生成される．系 1・3・8 により，T_{ij}^* 全体で生成された部分群 M は連結代数群である．▌

上の定理 1·4·5 を認めれば，次の系が出る．

系 1·4·6 代数群 G の部分代数群 H, K について，

(イ) H, K の一方が正規部分群ならば，H と K とで生成された部分群 $H\vee K$ は代数群である．したがって，このとき，交換子群 $[H, K]$ も代数群である．

(ロ) H, K の一方が連結であれば，H と K とで生成された部分群 $H\vee K$ は代数群である．

証明 (ロ)：$[H, K]$ が（連結な）代数群であるから，定理 1·4·5 により明白．

(イ)：$H=h_1H_0\cup h_1H_0\cup\cdots\cup h_sH_0$, $K=K_0k_1\cup K_0k_2\cup\cdots\cup K_0k_t$；$H_0, K_0$ は連結部分代数群とする．H, K の一方が正規部分群であるから，$H\vee K=HK$. これは $h_iH_0K_0k_j$ $(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,t)$ の和集合である．Hが正規部分群とすれば，H_0 も正規部分群，そこで，H_0K_0 は部分群である．そこで，H_0K_0 は連結代数群となる．したがって，$h_iH_0K_0k_j$ は既約な代数的集合であるから，それら有限個の和集合 HK は代数的集合である． ▌

問 2 上の記号で，$HK=KH$ であるときは，HK は代数群であり，$[H, K]$ も代数群になる．

1·5 例

定理 1·5·1 一般線型群 $G=GL(n, \Omega)$ については，交換子群 $D=[G, G]$ は特殊線型群 $SL(n, \Omega)$ と一致する．$[D, D]=D$ である．

証明 $n=1$ ならば，G は可換であり，$SL(n, \Omega)$ は単位元だけであるから，明らかに定理は正しい．$n\geq 2$ としよう．$a, b\in G$ のとき，$\det(a^{-1}b^{-1}ab)=(\det a)^{-1}(\det b)^{-1}(\det a)(\det b)=1$ ゆえ，$a^{-1}b^{-1}ab\in SL(n, \Omega)$.

$\therefore$ $D\subseteq SL(n,\Omega)$. そこで，$[SL(n, \Omega), SL(n, \Omega)]=SL(n, \Omega)$ を示せば，証明が完了する．それは次の定理に含まれる．

定理 1·5·2 Kが体であるとき，$H=SL(n, K)$ $(n\geq 2)$ を考える．K の元数≤ 3 のときは，$n\geq 3$ とする．

(イ) 交換子群 $[H, H]$ は H と一致する．

(ロ) H の中心 Z は，対角線上がKの一定元 λ (ただし $\lambda^n=1$) で，他が

0である行列 λe 全体から成る有限群で，H/Z は単純群である．

この定理の証明のための準備として，$SL(n, K)$ についての考察をする．

$\lambda\in K$ と各 $i\neq j$ (i, j は1から n までの自然数) に対して，λ_{ij} は対角線上は全部 1，(i, j) 成分が λ，他の成分は0の行列 ($\in H$) とする．また (i, i), (j, j) 以外の対角線上が全部1，(i,j) 成分が1，(j, i) 成分が-1 で，他の成分が全部0の行列 ($\in H$) を T_{ij} で示すことにする．

（1） $\{\lambda_{ij}|\lambda\in K,\ i<j\}$ で生成された部分群 Γ は $\{(a_{ij})\in SL(n, K)|\ i>j\Rightarrow a_{ij}=0;\ a_{ii}=1\ (\forall i)\}$

証明 $\Gamma_s=\{(a_{ij})\in SL(n, K)|\ a_{ii}=1\ (\forall i);\ i>j\Rightarrow a_{ij}=0;\ 0<j-i<s-1\Rightarrow a_{ij}=0\}$ とおく．Γ_n は $\{\lambda_{1n}|\lambda\in K\}$ で生成されるから，$\Gamma\supseteq\Gamma_n$. あと，$\Gamma\supseteq\Gamma_{s+1}\Rightarrow\Gamma\supseteq\Gamma_s$ を示せばよく，それは Γ_s が Γ_{s+1} と $\{\lambda_{ij}|\lambda\in K,\ j-i=s-1\}$ によって生成されることから出る． ▌

（2） $\{\lambda_{ij}|\lambda\in K,\ i>j\}$ で生成された部分群 Γ^* は $\{(a_{ij}\in SL(n, K)|\ i<j\Rightarrow a_{ij}=0;\ a_{ii}=1\ (\forall i)\}$

（3） $SL(n,K)$ は λ_{ij} 全体で生成される．

証明 λ_{ij} 全体で生成された群，すなわち，Γ と Γ^* とで生成された群を S とする．$S\subseteq SL(n,K)$ は明白，まず $T_{ij}\in S$ を示そう．

$$(*)\quad \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab & a\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab & a+c+abc\\ b & 1+bc\end{pmatrix}$$

において，$b=1$, $a=c=-1$ とおけば，$n=2$ のときの T_{21} を得る．そこで，一般のときは $(-1)_{ji}1_{ij}(-1)_{ji}=T_{ij}$ を得る．∴ $T_{ij}\in S$. つぎに，**対角型行列** (a_{ij}) [すなわち，$i\neq j\Rightarrow a_{ij}=0$ なる (a_{ij})] で $SL(n,K)$ に属するものは S の元であることを示そう．Kの元数$=2$ なら，そのような (a_{ij}) は単位行列 e だけだから，明白．Kの元数>2 とする．0以外の任意のKの元 t をとる．$a\in K$ を，0 以外にとる．そして，$b=(t-1)/a$, $c=-a/t$ とおき，これを上の（*）に代入すると，$\begin{pmatrix}t & 0\\ b & t'\end{pmatrix}$ となる．行列式$=1$ ゆえ，$t'=t^{-1}$. そこで，$n=2$ のときは，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -t^{-1}b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 0\\ b & t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\in S.$$

一般の n については，$n=2$ のときの結果から直ちに

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & t & & & \\ & & & & t^{-1} & & \\ & & & & & 1 & \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

の形の元はすべてSに属することがわかる．この形の元の積として，$SL(n, K)$ に属する対角型行列 (a_{ij}) を表わし得ることから，$(a_{ij})\in S$. 次に，任意の $(a_{ij})\in SL(n, K)$ を考えよう．$(a_{ij})\in S$ を示すためには，これにSの元を適当にかけたものがSに属することをいえばよい．ゆえに，Sの元をかけたものに,順次おきかえてよい．適当な T_{1i} を右からかけることによって，$a_{11}\neq 0$ としてよい．すると，適当な $b\in\Gamma^*$ を左からかけることによって，$a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$ と仮定してよい．次に，

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A_2} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

の A_2 の部分にも同様のことを適用して，

$a_{32}=a_{42}=\cdots=a_{n2}=0$ と仮定してよい．このことをくりかえすことにより，$i>j\Rightarrow a_{ij}=0$ と仮定してよい．すると $\Pi_i a_{ii}$ は行列式となり，$\Pi a_{ii}=1$.

$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ の逆元を左からかけることにより，$(a_{ij})\in\Gamma$ との場合となる．ゆえに，最初の $(a_{ij})\in S$.

（4） $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \lambda(t^2-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

（5） i, j, k が互に異なるときは

$$\lambda_{ik}1_{kj}(\lambda_{ik})^{-1}(1_{kj})^{-1}=\lambda_{ij}$$

この二つの関係式は容易にたしかめられる．

定理 1·5·2（イ）の証明: $n>2$ のとき:（5）により $\lambda_{ij}\in[H, H]$.（3）により，$H=SL(n, K)\subseteq[H, H]$. つぎに，$n=2$ のときを考える．このときは仮定により，Kの元数≥ 4. そこで，$t^2-1\neq 0$，$t\neq 0$ なる $t\in K$ がある．そして，（4）により，$\forall\lambda\in K$ について，$((t^2-1)\lambda)_{12}\in[H, H]$. $\forall\lambda\in K$, $\mu=\lambda/(t^2-1)$ とおけば，$((t^2-1)\mu)_{12}=\lambda_{12}\in[H, H]$. 転置行列を考えて，$\lambda_{21}\in[H, H]$. ゆえに（3）により，$H=SL(n, K)\subseteq[H, H]$. よって，（イ）の

証明が完了した.

(ロ) の証明を考えよう. Kの上の $n-1$ 次元の射影空間 $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$(2・1 節参照) を考える. $\boldsymbol{A}^n(K)$ の $(0,\cdots,0)$ 以外を考え, $(a_1,\cdots,a_n)$ と $(b_1,\cdots,b_n)$ とが同じ点を表わす$\Longleftrightarrow \exists t\in K$, $(a_1,\cdots,a_n)=(tb_1,\cdots,tb_n)$ とするのである. $SL(n,K)$ の元 (a_{ij}) は, $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の点 $(x_1,\cdots,x_n)$ を $(x_1,\cdots,x_n)(a_{ij})$ にうつす置換と考える.

(i) $(a_{ij})\in SL(n,K)$ が, $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の置換として, 恒等置換 $\Longleftrightarrow$ $(a_{ij})=\lambda E_n$ (E_n は n 次単位行列), $\lambda^n=1$.

証明 $\Rightarrow$: $\forall(x_1,\cdots,x_n)$, $\exists\lambda\in K$, $(x_1,\cdots,x_n)(a_{ij})=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$. 単位ベクトル $e_i=(0,\cdots,0,1,0\cdots0)$ (i 座標が1)のときの λ を λ_i とすれば, (a_{ij}) は対角線上が $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ の対角型行列であることを知る. 次に $(1,1,\cdots,1)(a_{ij})=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ゆえ, λ_i は共通, $1=\det(a_{ij})=\lambda^n$. $\Leftarrow$は明白. ▮

(ii) $SL(n,K)$ は $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の上の置換群として, 2重可移である, すなわち, a,b,c,d が $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の点で, $a\neq b$, $c\neq d\Rightarrow\exists(a_{ij})\in SL(n,K)$, $a(a_{ij})=c$, $b(c_{ij})=d$.

証明 $a=e_1$, $b=e_2$ のときをまず考える c,d の座標 $(c_1,\cdots,c_n)$, $(d_1,\cdots,d_n)$ を考える. これらは一次独立ゆえ, $GL(n,K)$ の元Aで, 第一行が $(c_1,\cdots,c_n)$, 第二行が $(d_1,\cdots,d_n)$ であるものがある. $\det A=\alpha$ ならば, 一つの行に α^{-1} をかけることによって, $\det A=1$ としてよい. すると, Aにより, 点 e_1 は点 c に, 点 e_2 は点 d にうつされる. 一般のとき, e_1 を a に, e_2 を b にうつす $B\in SL(n,K)$ を考えれば, $B^{-1}A$により, a が c に, b が d にうつる. ▮

次に, $S_0=\{(a_{ij})\in SL(n,K)\mid a_{12}=\cdots=a_{1n}=0\}$ とおき, その元

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0\cdots 0 \\ a_{21} & \\ \vdots & A_1 \\ a_{n1} & \end{pmatrix}$$

に対して, $A_1\in GL(n-1,K)$ を対応させる写像 φ は準同型である. φ の核を N_0 とする. $N_0=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ \alpha_2 & \\ \vdots & E_{n-1} \\ \alpha_n & \end{pmatrix}\right\}$ であり, N_0 の乗法はベクトル $(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ の加法と対応するから, N_0 は可換群である.

$H=SL(n,K)$ の部分群がひきおこす $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の上の置換群は, その部分

群の記号の上に $^-$ をつけて示すことにする．元についても同様にする．

(ロ) の証明: H の中心 Z に関する主張は易しい．H/Z の単純性の証明をしよう．(i) により $H/Z=\bar{H}$ と考えられる．$\bar{N}$ が $\bar{H}$ の正規部分群 $\neq\{$単位元 $\bar{e}\}$ とする．$\bar{S}_0$ の元は点 e_1 を動かさない．したがって，$g^{-1}\bar{S}_0g$ $(g\in\bar{H})$ の元は点 e_1g を動かさない．$\bar{H}$ が可移群であるから，$\bigcap_{g\in\bar{H}} g^{-1}\bar{S}_0g$ の元はすべての点を動かさない．∴ $\bigcap_{g\in\bar{H}} g^{-1}\bar{S}_0g=\{\bar{e}\}$．∴ $\bar{N}\not\subseteq\bar{S}_0$．そこで，$\bar{a}\in\bar{N}$，$\bar{a}\notin\bar{S}_0$ なる元 $\bar{a}$ がある．$\bar{a}$ は e_1 を動かす．$e_1\bar{a}=b$ とする．点 $e_1\neq$ 点 b．$\bar{H}$ が二重可移であるから，$\bar{S}_0$ は $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)-\{e_1\}$ の上の可移群である．$c\in\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$，$c\neq e_1$ とすると，$\exists\,\bar{a}_1\in\bar{S}_0$，$b\bar{a}_1=c$ そこで，$\bar{N}\bar{S}_0$ を考えると，$\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$ の上の可移群になる．これが e_1 を動かさない元全部を含むから，$\bar{N}\bar{S}_0=\bar{H}$．∴ $\bar{H}/\bar{N}=\bar{N}\bar{S}_0/\bar{N}\cong\bar{S}_0/(\bar{N}\cap\bar{S}_0)$．$\bar{N}_0$ は $\bar{S}_0$ の正規部分群．ゆえに $\bar{N}\bar{N}_0$ は $\bar{H}$ の正規部分群．$\bar{\lambda}_{21}\in\bar{N}\bar{N}_0$ であり，λ_{ij} と λ_{21} とは $SL(n, K)$ の中で互に共役ゆえ，正規部分群 $\bar{N}\bar{N}_0$ は $\bar{\lambda}_{ij}$ をすべて含む．ゆえに (3) により，$\bar{N}\bar{N}_0=\bar{H}$．$\bar{H}/\bar{N}\cong\bar{N}_0/(\bar{N}\cap\bar{N}_0)$ で N_0 が可換群であるから，$\bar{H}/\bar{N}$ も可換．∴ $\bar{N}\supseteq[\bar{H},\bar{H}]=[H,H]^-=\bar{H}$．∴ $\bar{N}=\bar{H}$．ゆえに $\bar{H}=SL(n,K)/Z$ は単純．(定理 1·5·2 の証明終)

問1 $GL(n,K)$ において，$(K$ の元数$)\leq 3$ のときは $n\geq 3$ とする．すると，$GL(n,K)$ の正規部分群は $SL(n, K)$ を含むか，または中心に含まれるか，いずれかである．

定理 1·5·3 $GL(n, K)$ (K は体) において，$\varDelta=\{(a_{ij})\in SL(n, K)\mid i>j\Rightarrow a_{ij}=0\}$ とおく．$[\varDelta, \varDelta]\subseteq\Gamma=\{(a_{ij})\in\varDelta\mid a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1;\ i>j\Rightarrow a_{ij}=0\}$ であり，(K の元数)≥ 4 であれば $[\varDelta,\varDelta]=\Gamma$．

証明 Γ が λ_{ij} $(i<j)$ 全体で生成される (上の (1))．$T=\{(a_{ij})\in SL(n,K)\mid i\neq j\Rightarrow a_{ij}=0\}$ とおくと，$T\Gamma=\varDelta$．$t\in T\Rightarrow t^{-1}\lambda_{ij}$ が μ_{ij} の形であることと，上の二つのことから，Γ は $\varDelta$ の正規部分群であることを知る．また $\varDelta/\Gamma\cong T/(T\cap\Gamma)=T$ ゆえ，$\varDelta/\Gamma$ は可換群．ゆえに $\Gamma\supseteq[\varDelta, \varDelta]$．最後のことは，上の (4) により，定理 1·5·2 の (イ) におけると同様にして証明される． ▮

定理 1·5·4 $S=\{(a_{ij})\in GL(n, K)\mid i>j\Rightarrow a_{ij}=0\}$ とおくと，S は可解群

である．Γを上と同様にとれば，Γはべき零群である．

証明　$[S, S] \subseteq \Gamma$ は前定理と同様．そこで，Γのべき零性を示せばよい．Γ_sを（1）におけると同じにとる．すると，$[\Gamma_s, \Gamma] \subseteq \Gamma_{s+1}$ は，λ_{ij} の形の Γ_s, Γ の生成元の交換子を計算することによって，容易に知られるから，Γ はべき零．　▌

問2　この節で扱った，いろいろな群について，Kが万有体Ωであるときについて，どれが代数群になっているか考えよ．

(実は，定理 1·5·2 の証明にでてくる $\bar{H}$ の部分群も，代数群なのであるが，それは今までの知識だけでは知り得ない．3·4 節参照)．

第 2 章　代　数　群 (2)

この章では，代数群に関する基本的定義を与える．特に 2·3 節で述べる，代数群の作用に関する概念は，代数群について，大へん基本的なことであることに注意しておこう．一般に，群の重要性は，それの作用にあるといっても過言ではないであろう．(その一端が英文の古い群論の書において，群の元が，element でなく，operation とよばれている点に現われているともいえよう．) 代数群については，その重要な作用は有理作用である．

2·1　多　様　体

通常，疑射影多様体，疑射影代数的集合とよばれるものを考える．詳しいことは他の成書にゆずることにして，ここでは概略しか述べない．

(1)　**$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の代数的集合**　万有体 Ω を固定し，その上の n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ を考える．これは，$\boldsymbol{A}^{n+1}(\Omega)$ の $(0,\cdots,0)$ 以外の元 $(a_0,\cdots,a_n)$，$(b_0,\cdots,b_n)$ が同じ点を表わす $\Longleftrightarrow$ $\exists t\in\Omega$，$b_i=ta_i$ $(\forall i)$ によって，$\boldsymbol{A}^{n+1}(\Omega)-\{(0,\cdots,0)\}$ を類別したものと考えられる．

$\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の中の代数的集合を定義するのには n 変数の多項式環 $\Omega[X_1,\cdots,X_n]$ を考えた．これに対応して，$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ に対しては，$n+1$ 変数の多項式環 $\Omega[X_0,\cdots,X_n]$ を考える．$a\in\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の座標が $(a_0,\cdots,a_n)$ で，$f(X)\in\Omega[x_0,\cdots,x_n]$ のとき，$f(a_0,\cdots,a_n)=0$，$f(ta_0,\cdots,ta_n)\neq0$ $(\exists t\in\Omega)$ ということが起り得る．しかし，$f(x)$ が斉次式であれば，そのようなことは起らない．そこで，

(イ)　F が $\Omega[x_0,\cdots,x_n]$ の，斉次式から成る部分集合であるとき，$\{a\in\boldsymbol{P}^n(\Omega)\mid f(a)=0\ (\forall f\in F)\}$ を F の**零点集合**，または F で定義された ($\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の) (強い意味の) **代数的集合**という．*)

また，もう少し一般に $f(X)=f_0(X)+\cdots+f_d(X)$；$f_i(X)$ は i 次斉次式のとき，各 $f_i(a)=0$ であれば，この性質は a の座標のえらび方に関係しない．

---

*) (4) で一般な代数的集合を定義するまでは，単に"代数的集合"ということで，ここでいう強い意味の代数的集合を意味することにする．

そこで，上の（1）は次のようにすることと，本質的には同じである．

（ロ）I が $\Omega[X_0,\cdots,X_n]$ の斉次イデアルであるとき，$V(I)=\{a\in \boldsymbol{P}^n(\Omega)|f(a)=0\ (\forall f\in I)\}$ を，I で定義された $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の**代数的集合**という．

問 $V(I)=$空 $\Longleftrightarrow I\supseteq(\sum_i X_i\Omega[X_0,\cdots,X_n])^t\ (\exists t)$.

斉次イデアルの準素イデアル分解が斉次準素イデアルによってでき，斉次準素イデアルの根基が斉次素イデアルであることから，アフィンのときと同様に：

斉次素イデアルで定義されるとき，**既約**な代数的集合であるという．そして，任意の $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の代数的集合 V に対して，**既約成分**の定義ができる（定理1·1·4 参照）．

（2）**Zariski 位相** $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ において，その中の代数的集合全体を閉集合と定めて，位相が入る．これを **Zariski 位相** という．アフィンの時と同様，断らない限り，Zariski 位相を入れて考える．$\boldsymbol{A}^n(\Omega)\ni(a_1,\cdots,a_n)$ を $(1,a_1,\cdots,a_n)\in\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ と同一視すると，$\boldsymbol{A}^n(\Omega)\subseteq\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ となるが，このとき，

定理 2·1·1 $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ は $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の部分空間である．

証明 V が斉次イデアル I で定義された代数的集合 $\Rightarrow V\cap\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ は $\{f(1,X_1,\cdots,X_n)|f\in I\}$ で定義された代数的集合．逆に，V_1 が $\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ のイデアル I_1 で定義された $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の代数的集合，V が $\{f^*|f\in I_1\}$（ただし，$f=f_0+f_1+\cdots+f_s\in\Omega[X_1,\cdots,X_n]$, f_i が i 次斉次式のとき，$f^*=X_0{}^sf_0+X_0{}^{s-1}f_1+\cdots+f_s$（$s$ 次斉次式））で定義される代数的集合ならば，

$$V_1=V\cap\boldsymbol{A}^n(\Omega).\qquad\blacksquare$$

$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の部分集合にも，$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の部分空間として位相を入れる．すると，アフィンの時と同様：

定理 2·1·2 $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の部分空間においては，閉集合についての極小条件が成立し，したがってコンパクト空間である．V が既約な代数的集合，U, U' が V の空でない開集合であれば，$U\cap U'$ は V の空でない開集合である．

（3）**有理函数** 有理函数は，アフィンの時と少しちがって，$\Omega[X_0,\cdots,X_n]$ の元は，直接函数を定めてはいない．$f(X)$, $g(X)$ が同次の斉次式，$a\in\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ であるとき，a の座標 $(ta_0,\cdots,ta_n)$ をとると，$f(ta)/g(ta)$ は t の値には関係しないから，$g(a)\neq0$ である限り，a で定義された函数と考えられる．そこで $\{f(X)/g(X)|f,\ g$ は同次斉次式$\}$ を $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の上の**有理函数体**と

いい（体になることは明白であろう），その元を**有理函数**という．分母が a で0にならないとき，その有理函数は a で**正則**であるという．

V が斉次イデアル I_1 で定義された代数的集合であれば，$I=\{f\in\Omega[X_0,\cdots,X_n]|\,f(a)=0\ (\forall a\in V)\}$ は I_1 の根基である．$\Omega[X_0,\cdots,X_n]/I$ を V の**斉次座標環**といい，この環における $X_0,\cdots,X_n$ の類 $x_0,\cdots,x_n$ を V の**斉次座標系**という．$\Omega[x_1,\cdots,x_n]$ の同次斉次式 $f(x)$，$g(x)$ をとれば $f(x)/g(x)$ は $g(a)\neq 0$ なる $a\in V$ において定義された函数となる．このような函数を V の上の**有理函数**といい，a で**正則**であるという．

V が既約であれば，これら有理函数全体は体になる．それを V の**有理函数体**という．$a\in V$ のとき，$J=\{f(x)\in\Omega[x_0,\cdots,x_n]|$（$a$ の座標の比例定数に関せず）$f(a)=0\}$ は座標環 $\Omega[x_0,\cdots,x_n]$ の素イデアルになる．$J\not\ni x_i$ ($\exists i$) ゆえ，a で正則な $x_0/x_i,\cdots,x_n/x_i$ を考えることができる．すると，a で正則な V 上の有理函数全体は，$\Omega[x_0/x_i,\cdots,x_n/x_i]_S$ ($S=\{f(x)/x_i^t|\ f(x)$ は t 次斉次式で，$\notin J\}$ と考えられる．この環を a の V 上の**局所環**という．この環は x_i のえらび方には無関係である．この定義は V が既約でないときにもそのまま拡張し，$a\in V$ に対して，S を上のように作り，$\Omega[x_0/x_i,\cdots,x_n/x_i]_S$ を a の V 上の**局所環**という．各点の局所環が正規環であるとき，V は**正規**であるという．

(4) **代数的集合の定義** $R=\Omega[y_0,\cdots,y_n]$ が，y_i を一次斉次元にもつ，次数つき環で，0 以外にべき零元をもたないものとする．すると，多項式環 $\Omega[X_0,X_1,\cdots,X_n]$ から R の上への Ω-準同型 φ で，$\varphi X_i=y_i$ ($\forall i$) なるものが一意的に定まる．φ の核 I は，(3) の V を適当にえらんだときの V に対する I になる．このとき R は V の斉次座標環と同型であるから，R を基準にとって，V の各点の局所環を作ることができる．((3) での定義での x_j/x_i に対して y_j/y_i を考え，$S'=\{f(y)/y_i^t|\,f(y)$ は t 次斉次式，$f(a)\neq 0\}$ をとり，a の局所環 $=\Omega[y_0/y_i,\cdots,y_n/y_i]_{S'}$ をとるのである.)

このように，**斉次座標環**，**有理函数**，**局所環**は，斉次座標環を(上のように)同型なものにおきかえて，それから作ったものを考えてよい，というように，一般化しておく．このように一般化した上で，一般の代数的集合*) の定義を次のようにする．

---

*) 実は，もっと一般な代数的集合の概念があるが，本書ではふれない．

集合 W の各元 a に環 R_a が対応させられていて，次の条件をみたすとき，W は**代数的集合**であるという．

W から適当な $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中への一対一写像 φ があり，φW の閉包 W^* の適当な閉部分集合 F^* をとれば，$\varphi W=W^*-F^*$．さらに，（W^* の座標環を適当にえらんで固定した上で）R_a が φa の W^* 上での局所環と丁度一致する．

また，（イ）W^* が既約であるとき，Wは**既約**な代数的集合である，または**多様体**であるという；（ロ）F^* が空であるようにえらべるとき，W は**射影代数的集合**であるという．（ハ）$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の代りに $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ をとって同様にできるとき，W は擬アフィン代数的集合であるといい，さらに，φW が $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の中の強い意味の代数的集合であるようにえらべるとき，W は**アフィン**代数的集合であるという．

注意　射影代数的集合のときは，上のような φ, W^*, F^* をとれば必ず F^* が空になることが知られている．しかし，アフィン代数的集合のときは，F^* が空になるかどうかは φ に関係する．例えば，$GL(n,\ \Omega)$ は前章で知ったようにアフィン多様体である．そして，$(a_{ij})\in GL(n,\Omega)$ を $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn})\in\boldsymbol{A}^{n^2}(\Omega)$ に対応させる φ をとっても，上の条件をみたすが，このときは F^* は行列式が 0 の n 次正方行列に対応する点全体になり，$F^*\neq$空．

定理 2·1·3　V が代数的集合ならば，V は有限個のアフィン代数的集合 V_i の和集合である．*)

証明　$f(X)$ が $\Omega[X_0,\cdots,X_n]$ の斉次式，$\deg f(X)=d>0$ であるとき，$A=\{a\in\boldsymbol{P}^n(\Omega)\mid f(a)\neq 0\}$ はアフィン多様体である．（座標環は $R_f=\{g(X)/f^s(X)\mid g$ は sd 次斉次式；s は自然数を動く$\}$ になる．）これは $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の代数的集合 V に対しても準用できて，$V\cap A$ はアフィン代数的集合，座標環は R_f の準同型像になる．これを利用する．代数的集合の定義の φ, W^*, F^* をとって，F^* を定義する斉次式 $f_1(X),\cdots,f_s(X)$ をとる．W^* の斉次座標環 $\Omega[x_0,\cdots,x_n]$ において，$f_1(x),\cdots,f(x_s)$ をとり，上のことを，一つの $f_i(x)$ に対して適用して得られる V_i（$V\cap A$ として得られるもの）をとれば，

*) この和集合の意味は単なる点集合としての和集合ではなく，各点に対応させた環は変更しないで，V_i がアフィン多様体になっているようにできることを意味している．

したがって，代数的集合が既約なものの和集合（1·1 節(1)）というのとは，本質的に異なる概念である．a が既約成分 V_1, V_2 に含まれれば，a の V 上の局所環 R_a は V_1, V_2 に対応する高さ 0 の素イデアルをもち，したがって，それは整域ではない．しかし，a の V_i 上の局所環は整域である（R_a の準同型像になる）．

点の局所環は変化せず，点集合としては $\cup V_i = W^* - F^*$ となる． ▌

（5） **直積** $A \subseteq \boldsymbol{A}^n(\Omega)$，$B \subseteq \boldsymbol{A}^m(\Omega)$ であるとき，積集合 $A \times B$ は点の座標をならべることによって，$\boldsymbol{A}^{n+m}(\Omega)$ の点と考えた．射影空間で全く同様にすると不都合がおきる．[$(a_0, \cdots, a_n)$，$(b_0, \cdots, b_m)$ をそれぞれ射影空間の点とするとき，その座標をならべるといっても，任意の 0 でない定数 t，u により $(ta_0, \cdots, ta_n,\ ub_0, \cdots, ub_m)$ も座標を（同じ順に）ならべたのである．$\boldsymbol{P}^{n+m+1}(\Omega)$ の点としては，$(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m) \neq (ta_0, \cdots, ta_n, ub_0, \cdots, ub_m)$ ($t \neq u$ のとき) であるから.] そのことと，有理函数（または点の局所環）を考えて，代数的集合としての構造がアフィン代数的集合のときと同様に行くようにするために，次のようにする．$A \subseteq \boldsymbol{P}^n(\Omega)$，$B \subseteq \boldsymbol{P}^m(\Omega)$ のとき，$a = (a_0, \cdots, a_n) \in A$，$b = (b_0, \cdots, b_m) \in B$ に対して，(a, b) は $\boldsymbol{P}^{nm+n+m}(\Omega)$ の点 $(a_0b_0, a_0b_1, \cdots, a_0b_n,\ a_1b_0, a_1b_1, \cdots, a_1b_m, \cdots, a_nb_0, \cdots, a_nb_m)$ とする．すると，A，B が $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$，$\boldsymbol{P}^m(\Omega)$ の中の代数的集合であれば，直積 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ は $\boldsymbol{P}^{nm+n+m}(\Omega)$ の中の代数的集合であり，A，B が既約なら $A \times B$ も既約．そして，A，B がアフィン代数的集合であれば，$A \times B$ の座標環は，A，B の座標環 R_A，R_B の Ω 上のテンサー積と同型であり，したがって，もっと一般に，A，B に代数的集合としての構造が（点の局所環と，射影空間の中への写像 φ とによって）与えられているとき，$A \times B$ の代数的集合としての構造は，φ のえらび方には本質的には無関係になるのである．

（6） **代数的部分集合** 代数的集合 V は，本質的には，ある $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の（閉集合 V^*）−（閉集合 F^*）の形のものと考えられる（有理函数も考えなくてはいけないが）．これの部分集合 V' で，同様の形をしているものを考えると，V' の点 a に対して，その局所環は V の点としての局所環の準同型像になっている．その準同型は単なる，各点毎に定まった準同型というのでなく，V' に対応するイデアルによって定まるものである．層の概念を利用すれば，V の局所環の層 $\mathcal{O}_V$ と，V' に対応するイデアルの層 I_V とにより，$\mathcal{O}_V/I_V$ によって，V' の局所環の層が導かれる．*) このような V' を V の**代数的部分集合**という．V' が V の閉集合であれば，代数的閉部分集合という．

*) V' が V の中で閉集合ならば，$\mathcal{O}_V/I_V$ が V' の局所環の層であるが，(閉集合 V'')−(閉集合 F') だと，F' の点に相当する分だけ除いたものが V' の局所環の層になる．

（7） **正則写像**　代数的集合 V から，代数的集合 W の中への写像 φ が**正則写像**であるとは，次の条件が充されているときにいう：V が $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の代数的部分集合 V^*-F^* （V^*, F^* は閉集合，V^*-F^* の閉包$=V^*$)，W が $\boldsymbol{P}^m(\Omega)$ の代数的部分集合 W^*-K^* （W^*, K^* は閉集合，W^*-K^* の閉包$=W^*$) によって，代数的集合としての構造が与えられているものとする．V, W の点の斉次座標は，対応する $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$, $\boldsymbol{P}^m(\Omega)$ の点の斉次座標を意味するものとする．このとき，V^* の斉次座標系 $x_0, \cdots, x_n$ についての，一定次数の斉次式 $f_0(x), \cdots, f_m(x)$ が存在して，V の各点 a について，$\exists i$ および一定次数の斉次式 $g_0(x)$, …, $g_m(x)$ で，$g_i(a)\neq 0$,　$g_j(x)f_i(x)=f_j(x)g_i(x)$ $(j=0, \cdots, m)$，さらに φa の斉次座標が $(g_0(a), g_1(a), \cdots, g_m(a))$.

この条件は次のように言っても同じである：Vが，定理 2·1·3 の意味で，アフィン代数的集合 $V_1, \cdots, V_s$ の和であって，各 φV_i がアフィン代数的集合の中に入り，しかも，そのとき φ が 1·1 節の意味の正則写像である．

上で，さらに $\varphi V=W$, φ が一対一対応，φ^{-1} も正則写像であるとき，φ は**双正則写像**であるという．またそのような φ があるとき，V と W とは互に**双正則**であるという．V と W とが互に双正則であることと，代数的集合の定義における射影空間内の集合が，同一にえらべることとが同値である．したがって，互に双正則な代数的集合は，同じ（代数的集合としての）構造をもつと考えられる．双正則写像が同相写像であることはもちろんである．

注意　互に双正則であっても，図形的には大分ちがうことがおこる．例えば，$\boldsymbol{P}^1(\Omega)$ は $\boldsymbol{P}^2(\Omega)$ 内の二次曲線 V: $X^2+YZ=0$ と互に双正則である．$\boldsymbol{P}^1(\Omega)\to V$ は，$(X_0, X_1)\to(X_0X_1, X_0^2, X_1^2)$ によって定まる．逆写像は $(X, Y, Z)\to(Y, X)$ によって得られる．

上の（4）での注意で述べたことは，次の事実による．

定理 2·1·4　Vが射影代数的集合，φがVからある代数的集合の中への正則写像であれば，φV は射影代数的集合である．

（証明は本節最後の注意参照.）

系　2·1·5　$\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の代数的部分集合 V が射影代数的集合であれば，V は有限個の点から成る．

また，次の性質も重要である．

定理 2·1·6 φが代数的集合Vから代数的集合Wの中への正則写像であるとする．FがVの部分集合，F^*がFの（Vにおける）閉包であるとき，φF^*はφFの（Wにおける）閉包に含まれる．

証明 定理1·1·7により，φは連続写像． ▮

定理 2·1·7 φが代数多様体Vから正規代数多様体Wの上への正則写像で，$a\in W$について，$\varphi^{-1}(a)$の点の数がaに関せず一定数n（自然数）であれば，（イ）Wがアフィン多様体⇒Vもアフィン多様体，（ロ）Wが射影多様体⇒Vも射影多様体．

（証明は省く．）

（8） **代数的集合の対応** V $(\subseteq \boldsymbol{P}^n(\Omega))$，$W$ $(\subseteq \boldsymbol{P}^m(\Omega))$が代数的集合であるとき，$V\times W$は代数的集合である．$T$が$V\times W$の閉集合であるとする．$T$から$V$，$W$への**射影**$\varphi$，$\psi$を$\varphi(v\times w)=v$，$\psi(v\times w)=w$によって定める．これらは正則写像である．$\varphi T$，$\psi W$がそれぞれ$V$，$W$で稠密であるとき，$T$は$V$と$W$との**対応**であるといい，$v\times w\in T$であるとき$v$と$w$とは($T$により）**対応する**という．

次の事実は，射影多様体の基本的性質の一つを示す．

定理 2·1·8 上で，Wが射影多様体であれば，$\varphi T=V$.

（証明は省く．）

Uも代数的集合，UからV，Wへの正則写像φ'，ψ'（$\varphi'U$，$\psi'U$はV，Wで稠密）であるとき，$\{(\varphi'u)\times(\psi'u)) \mid u\in U\}$の$V\times W$における閉包を$T$とする．この$T$を$V$と$W$との**結**という(1·1節で述べた結の一般化になっている)．

注意 特に$U=V$（φ'は恒等写像）のときは，TとVとが双正則になる．この特別な場合に定理2·1·8を利用すれば定理2·1·4を得る．

2·2 代数群の定義（2）

1·2節で述べた代数群の定義そのままで（前節で一般化した，代数的集合の概念によって）**代数群**を定義する．すると，1·2節はアフィン代数的集合であって代数群であるものということになるので，それを**アフィン代数群**，または**線型代数群**という．*)

*) 線型代数群というのは，一般線型群の部分代数群になることから，その名がある．3·1節，特に定理3·1·2参照．

すると，定理 1・2・2, 1・2・3, 1・2・4, 1・3・1, 1・3・2, 系 1・3・3, 1・3・4, 定理 1・3・5, 1・3・6, 系 1・3・7, 1・3・8, 定理 1・3・9, 定理 1・4・1, 系 1・4・2, 1・4・3, 定理 1・4・4, 1・4・5, 系 1・4・6 は全部，このように一般化された代数群についても成り立つ．（証明は，変更の要はない．）

ここで，定理 1・3・5 から得られる次のことを，つけ加えておこう．

定理 2・2・1 代数群 G の代数的部分集合 H が群であれば，H は G の閉集合である．

代数群にはアフィン代数群でないものがあり，そのうち代表的なものは，射影多様体であって代数群になっているものである．そのようなものを **Abel 多様体**という．

次の三定理の成立することが知られている．

定理 2・2・2 Abel 多様体は可換群である．

定理 2・2・3 G が連結な代数群であるとき，G に含まれる連結なアフィン代数群のうちに最大なもの L がある．剰余類群 G/L は自然に Abel 多様体としての構造をもつ．*)

定理 2・2・4 G が連結代数群であるとき，G の正規部分代数群 N で，G/N がアフィン代数群の構造をもつもののうちには，最小のものがある．

これらについては，第 4 章で扱うことにする．

2・3 代数群の作用

G が代数群，V が代数的集合，G の各元 g と V の点 a との間の算法が定義されていて，その積 $ga \in V$，さらに次の条件がみたされているとき，G は V の上に**有理的**に作用しているといい，このような G の作用を**有理作用**という．

（イ） $G \times V$ から V の中への写像 $(g, a) \to ga$ は正則写像である．

（ロ） $g_1, g_2 \in G,\ a \in V \Rightarrow g_1(g_2a) = (g_1g_2)a$.

ここで次のことに注意しておく．

$g \in G$ を固定すれば，$a \to ga$ は V から V 自身への双正則写像である．

証明は定理 1・2・2 と同様である．

*) N が代数群 G の正規部分代数群であれば，G/N は自然に代数群としての構造をもつことが知られている（2・4 節参照）．

例 1 G が $GL(n,\ \Omega)$ の部分代数群，$V=\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ のとき，
$g=(g_{ij})\in G$, $a=(a_1,\cdots,a_n)\in V$ に対して，
$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\to g\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ によって算法を定めれば，G の V の上での有理作用になる．

例 2 G が $GL(n+1,\Omega)$ の部分代数群，$V=\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ のとき，上と同様に，各 $g\in G$ が V の一次変換を定めるようにすれば，G の V 上での有理作用が定まる．

例 3 G が代数群，H が部分代数群であるとき，G における算法により，H が G の上の有理作用を定めていると考えられる．

代数群 G が代数的集合 V の上に有理的に作用しているものとする．$a\in V$ に対して，$Ga=\{ga|\ g\in G\}$ を点 a の G による**軌道**という．$g\to ga$ は G から V の中への正則写像を定め，それによる G の像が Ga になるのである．このとき，G の各元は，V の上の函数の変換を定義する：$f(x)$ が（有理）函数のとき $(gf)(x)=f(g^{-1}x)$ によって，gf を定める．$g'\in G$ のとき，$(g'(gf))(x)=g'f(g^{-1}x)=f(g^{-1}g'^{-1}x)=((g'g)f)(x)$ ゆえ，$g'(gf)=(g'g)f$ が成り立つ(この議論は，有理函数でなくてもよかった)．この変換により，$a\in V$ で正則な有理函数は ga で正則な有理函数にうつる．V 全体で正則な有理函数は V 全体で正則な有理函数にうつる．ゆえに，

定理 2·3·1 上の状況の下で，

（イ） V 全体で正則な有理函数全体のなす環を R とすると，各 $g\in G$ は R の Ω-自己同型 σ_g を定め，

$$f(g^{-1}a)=(\sigma_g f)(a),\quad \sigma_g\sigma_{g'}=\sigma_{gg'}.$$

（ロ）*) V が既約であるとき，G の各元 g は V の有理函数体の Ω-自己同型 σ_g を定める．f が $a\in V$ で正則ならば $\sigma_g f$ は ga で正則，$\sigma_g\sigma_{g'}=\sigma_{gg'}$.

この $\sigma_g f$ は gf で示される．

定理 2·3·2 上の状況の下で，V の部分集合 S が G-認容（すなわち，$g\in G$,

*) V が既約でない場合は，V の既約成分 $V_1,\cdots,V_s$ の有理函数体 $L_1,\cdots,L_s$ の環としての直和 $L_1\oplus\cdots\oplus L_s=\Xi$ を考えれば，これが V の上の有理函数全体と考えられる．そして，G の各元は Ξ の自己同型をひきおこし，その意味で（ロ）と同様なことが成立するのであるが，本書では省くことにする．

$s\in S \Rightarrow gs\in S$) ならば, $GS=\{gs|\ g\in G,\ s\in S\}=S$ であり, S の V における閉包 S^* も G-認容である.

証明 $G\times V\ni(g,\ a)\to ga\in V$ なる写像 φ は正則写像である. また, $G\times S$ の $G\times V$ における閉包は $G\times S^*$ である. 定理 2・1・6 により, $\varphi(G\times S)$ の閉包 S^{**} は $\varphi(G\times S^*)$ を含む. ところが, $gS\subseteq S$ ($\forall g\in G$) ゆえ, $gS=S$ ($\forall g\in G$; $g^{-1}\in G$ ゆえ $g^{-1}S\subseteq S$ による). $\therefore$ $GS=S$. $\therefore$ $\varphi(G\times S)=GS=S$. $\therefore$ $S^{**}=S^*$. $\therefore$ $S^*\supseteq\varphi(G\times S^*)=GS^*$. ゆえに S^* も G-認容. ▮

定理 2・3・3 上の状況の下で V の任意の一点 a の軌道 Ga は代数的集合 ((V の閉集合)−(V の閉集合) の形) である.

証明 Ga の閉包を F^* とする. F^*-Ga の閉包 U^* をとる. Ga が G-認容ゆえ, F^* が G-認容 (前定理). ゆえに F^*-Ga も G-認容. ゆえに U^* も G-認容. $U^*\cap Ga\ni b$ とすると, $b\in Ga$ ゆえ, $Gb=Ga$. $\therefore$ $U^*\cap Ga=G(U^*\cap Ga)\supseteq Gb=Ga$ となり, $Ga=U^*\cap Ga$, すなわち, $U^*\supseteq Ga$.
$\therefore$ $F^*=U^*$. ところが, $g\to ga$ は G から V の中への正則写像を与えるから, Ga は F^* の空でない開集合を含む (定理 1・1・6 と前節 (7)). ゆえに $F^*=U^*$ ではあり得ない. $\therefore$ $U^*\cap Ga=$空. $\therefore$ $F^*-U^*=Ga$. ▮

注意 V の閉集合 F をとっても GF は代数的集合になるとは限らない. それは次の例で知られる.

例 $V=\boldsymbol{A}^2(\Omega)$, $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, t\in\Omega\right\}$ について, 作用を $a=(\alpha,\ \beta)\in V$, $g=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ について,

$$g\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+t\beta\\ \beta\end{pmatrix}$$

によって定める. $F=\{(c,\ y)\,|\,y\in\Omega$ (c は固定)$\}$ とすると,
$GF=\{(x,\ y)\,|\,y\neq 0\}\cup\{(c,\ 0)\}$ となり, $(c,\ 0)$ は $\{(x,\ y)\,|\,y\neq 0\}$ の閉包に含まれるから, GF は (閉集合)−(閉集合) の形にはなり得ない.

定理 2・3・4 代数群 G が代数的集合 $V_1,\cdots,V_s$ の上に有理的に作用しているとする. $V_1\times\cdots\times V_s$ の上に, G の作用を $g(a_1,\cdots,a_s)=(ga_1,\cdots,ga_s)$ ($g\in G$, $a_i\in V_i$) によって定めれば, これも有理作用である.

証明 $G\times V_i\in(g,\ a_i)\to ga_i\in V_i$ が正則写像ゆえ, $(g,\ a_1,\cdots,a_s)\to(ga_1,\cdots,ga_s)$ も正則写像. $g_1(g_2(a_1,\cdots,a_s))=g_1(g_2a_1,\cdots,g_2a_s)=(g_1g_2a_1,\cdots,g_1g_2a_s)$. ▮

定理 2・3・5 代数群 G が代数的集合 V の上に有理的に作用しているものと

する．SがVの閉集合であるとき，$H=\{g\in G\mid gS=S\}$，$H'=\{g\in G\mid gS\subseteq S\}$は一致して代数群をなす．

証明　Hが群であることと，$H\subseteq H'$ は明白．$g\in G$ がVからVの上への双正則写像をひきおこすから，$gS\subseteq S\Rightarrow gS=S$（閉集合の像は閉集合ゆえ）．$\therefore$　$H=H'$．あと，HがGの閉集合であることを示せばよい．$g\in G$，$a\in V$について，$(g,\ a)\to ga$ が正則写像であるから，G，V の斉次座標系をそれぞれ $(x_0,\cdots,x_n)$，$(y_0,\cdots,y_m)$ とすれば，$(X_0Y_0,\cdots,X_iY_j,\cdots,X_nY_m)$ についての斉次式 $f_\alpha(\cdots,X_iY_j,\cdots)=f_\alpha{}^*(X,\ Y)$ $(\alpha=0,\cdots,m)$が存在して，ga の斉次座標$=(f_0{}^*(g,\ a),\cdots,f_m{}^*(g,\ a))$．$S$は$V$の閉集合ゆえ，変数 $Z_0,\cdots,Z_m$ についての斉次式 $h_0(Z),\cdots,h_s(Z)$ が存在し，$S=V\cap(\{h_0(Z),\cdots,h_s(Z)\}$ の零点集合)．すると，各 $a\in S$ について，$H_a=\{g\in G\mid ga\in S\}$ は，$h_i(f_0{}^*(g,a),\cdots,f_m{}^*(g,a))=0$ $(\forall i)$ なる条件によって与えられるgの全体である．ゆえに，H_aはGの閉集合．ゆえに $H=\bigcap_{a\in S}H_a$ もGの閉集合である．　▌

そこで，定理 1·3·2 証明の残りをしよう．上で，$G=V$ とすれば，定理 1·3·2 の $\{g\in G|gS=S\}$ の分が出る．同じく $G=V$ でも，作用を，$g\in G$, $a\in V=G$ について，$ga=gag^{-1}$（右辺は群Gにおける算法，左辺は新算法）によって定めれば，定理 1·3·2 における正規化群のときが出る．

問　代数群Gが代数的集合Vの上に有理的に作用しているものとする．FがVの閉集合，TがVの部分集合であれば，(イ) $\{g\in G\mid gT\subseteq F\}$，$\{g\in G\mid gt=t\,(\forall t\in T)\}$ はともにGの閉集合である．(ロ) G の部分集合 H について，$\{p\in V\mid hp=p\,(\forall h\in H\}$ はVの閉集合である．

以上，代数群が左から作用している場合について述べた．ga と書いたところを ag と書くようにして，代数群が右から作用する場合も，対称的に扱える．注意すべきことは，左，右を逆にすることも，きわめて簡単にできる．例えば，代数群Gが右から作用している場合，新しい左からの作用を，

$$ga=ag^{-1}\quad(a\in V,\ \ g\in G)$$

によって定めると，G が左から有理的に作用することになる．（そのことの証明は易しい．各自試みよ．）

2・4　商

代数群 G が代数的集合 V の上に左から有理的に作用しているとする．次の性質をもつ W と φ_W との組を考える．

（イ）φ_W は V から W の上への正則写像である．

（ロ）$a\in V, g\in G \Rightarrow \varphi_W(a)=\varphi_W(ga)$．

このような組（W, φ_W）全体の集合を X としよう．

定理 2・4・1　適当な（U, φ_U）$\in X$ により，$\forall(W, \varphi_W)\in X$ に対して，U から W の上への正則写像 ψ_W が存在して，$\varphi_W=\psi_W\cdot\varphi_U$ であるような（U, φ_U）は双正則の意味で一意的，すなわち（$U', \varphi_{U'}$）も同じ性質をもてば，$\psi_{U'}$ は双正則写像である．

この U に φ_U を併せ考えたものを V の G による**弱い意味の商**という．$(G\backslash V)_w$ で示す．φ_U を V から U への**自然写像**という．

証明　（W, φ_W），（$W', \varphi_{W'}$）$\in X$ ならば W と W' との結 W'' により，（W'', φ''）$\in X$ ($\exists\varphi''$)，は定理 1・1・9 により知られ，このことから容易．▌

$(G\backslash V)_w$ が，さらに次の条件（（ロ）の逆）を充すとき，それを V の G による**商**といい，$G\backslash V$ で示す．

（ハ）$a, b\in V$, $\varphi a=\varphi b \Rightarrow a=gb$ ($\exists g\in G$)．（φ は自然写像）

定理 2・4・2　$G\backslash V$ が存在するため必要十分条件は，上の記号の下で，適当な X の要素（W, φ_W）により，a, $b\in U$, $\varphi_W a=\varphi_W b \Rightarrow a=gb$ ($\exists g\in G$) の成立することである．

証明　前定理により明白．▌

正則写像は連続写像であるから，一点の原像は閉集合である．したがって，

定理 2・4・3　$(G\backslash V)_w$ の一点に（自然写像によって）対応する V の点全体は，V の閉集合になる．特に，$G\backslash V$ が存在すれば，$\forall a\in V$ について，軌道 Ga は V の閉集合である．

注意 1　上の定義から明らかなように，$(G\backslash V)_w$ の上の有理函数は，V の上の有理函数で，G-不変なものであると考えられる（定理 2・3・1 と，その脚注参照）．

注意 2　V の各点の軌道が閉集合であっても，$G\backslash V$ が存在するとは限らない．その例は定理 2・3・3 のあとで述べた例の G, V によって得られる．

注意 3　どのようなとき $G\backslash V$ が存在するかという方向の問題は，興味のもてる問題

であるが，大抵むつかしい．そのうちの割合かんたんで，興味のあるものを一つ付録(不変元)の中で述べよう．ここでは，次のことが知られていることを指摘しておこう．

「Vの空でない，G-認容な開集合Uを適当にとれば，$G\backslash U$ が存在する．」

以上，左から作用するときを述べたが，右から作用するときも同様に扱う．$G\backslash V,(G\backslash V)_w$ は，この場合，V/G，$(V/G)_w$ で示される．

2·5 剰　余　類

以下，次の定理 2·5·1，定理 2·5·2 をまとめるまでに述べることの証明には，Chow 座標など，1·1 節，2·1 節で紹介しなかったことを利用するので，証明はアフィン代数群のときについてだけ，3·4 節で扱うことにする．

Gが代数群，Hがその部分代数群であるとする．$H\times G\ni(h, g)\to hg\in G$ は明らかにHのG上での有理作用を定める．その意味での商 $H\backslash G$ の存在することが知られている．Gから$H\backslash G$ への自然写像φをとれば，$a\in G$ について，φa と Ha とは一対一に対応するので，通常 φa を剰余類 Ha と同一視する．このようにして，$H\backslash G$ は剰余類の集合 $\{Ha| a\in G\}$ に代数的集合としての構造を与えたものと考えられる．$g\in G$, $Ha\in H\backslash G$ について，$(Ha)g=Hag$ と定めれば，$H\backslash G$ の上でのGの右からの作用が定まる．このGの作用も有理作用であることが証明される．また，$\dim G=\dim H+\dim H\backslash G$ であることも知られている．

上で，GとHとの順序を逆にして，$G\times H\ni(g,h)\to gh\in G$ を考えれば，G/H が同様に考えられ，Gが左からG/Hの上に有理的に作用し，$\dim G=\dim H+\dim G/H$. 以上のことをまとめると

定理 2·5·1　Gが代数群，Hが部分代数群であるとき，剰余類の集合 $H\backslash G$, G/H は共に正規な*)代数的集合をなし，Gはそれぞれの上に，右，左から有理的に作用する．そして，

$$\dim G/H=\dim H\backslash G=\dim G-\dim H$$

次に，Hがさらに正規部分群であるときを考えよう．G/Hの上の算法は代表元の算法によって定まっている．$(aH)(bH)=abH$, $(aH)^{-1}=a^{-1}H$. このことと，Gにおける算法の性質（写像 $(a,b)\to ab$, $a\to a^{-1}$ の正則性）により，

*) $H\backslash G$ の 2 点は G の元によって互にうつり得ることから，$H\backslash G$ の各点は単純点（4·1 節参照）であることが知られ，したがって，$H\backslash G$ が正規であることがわかるのである．

G/H が代数群であることが導かれる．すなわち，

定理 2·5·2 G が代数群，H がその正規部分代数群であるとき，G/H は代数群になる．

代数群 G が代数的集合 V の上に有理的に左から作用しているものとする．V の点 a を固定し，$S_a=\{g\in G|\ ga=a\}$ と，a の軌道 Ga とを考える．

定理 2·5·3 S_a は G の部分代数群であり，$G/S_a \ni gS_a \xrightarrow{\psi} ga \in Ga$ は一対一の正則写像を与える．

証明 S_a が部分代数群であることは定理 2·3·5 による．$G\ni g \xrightarrow{\phi} ga\in Ga$ は正則写像であり，$\phi b=\phi c\ (b,c\in G) \iff bS_a=cS_a$ ゆえ，G/S_a の定義（前節）により，ψ は正則写像，ψ が一対一写像であることは明白． ▌

注意 上の定理の場合，商 G/S_a の存在は，定理 2·5·1 を利用しなくても，定理 2·4·2 を利用すればよい．他方前ページの脚注で述べたのと同じ理由により，軌道 Ga を代数的集合と考えれば，その各点は単純点であり，Ga は正規代数的集合になる．

第 3 章　アフィン代数群

はじめに証明するように，アフィン代数群と線型代数群とは同じと考えてもよい．さて，この章では，アフィン代数群の構造についての，基本的結果を紹介する．

有限群論において，Sylow 部分群が，いささか不思議な，また非常に重要な存在であるが，アフィン代数群においては，Borel 部分群 (3·7～8 節) が (現象は Sylow 部分群とは，もちろん全然異なるが) 似た立場にあるように思える．

3·1　アフィン代数群と線型代数群

一般に，代数群 G から代数群 G' の中への写像 φ について，(イ) それが正則写像であり，しかも群としての準同型であるとき，φ は (代数群としての) **準同型**写像であるという．(ロ) それが双正則写像であり，しかも群としての同型写像であるとき，(代数群としての)*) **同型**写像であるという．G から G' の上への (代数群としての)*) 同型写像があるとき，G と G' とは**同型**であるといい，$G \cong G'$ で示す．代数群 G から $GL(n, \Omega)$ の中への (代数群としての) 準同型を n 次の**有理表現**という．G の表現加群 M による G の表現が有理表現を与えるとき，M は (代数群としての) **表現加群**であるという．

定理 3·1·1　代数群 G から代数群 G' の中への準同型 φ があれば，φG は G' の部分代数群であり，φ の核 N は G の正規部分代数群である．(したがって，φG は G' の，N は G の閉部分集合である．)

証明　φG は G' の部分群である．他方，φ が正則写像であるから，φG は，φG の閉包の各既約成分の空でない開集合を含む (定理 1·1·6)．ゆえに定理 1·3·5 により，φG は閉集合である．N については，G の元 g と G' の元 a との積 ga を，$(\varphi g)a$ によって定めれば，G は G' の上に有理的に作用する．この作用で，G' の単位元 e' について $\{g \in G \mid ge' = e'\}$ が N になるから，定理 2·5·3 により，N が部分代数群であることを知る．正規部分群であることは，準同型の核ゆえ明らか．　▮

---

*) 代数群として考えていることが明白であるときは，"代数群としての" は省く．

一般線型群 $GL(n, \Omega)$ (Ω は万有体) の部分代数群を**線型代数群**という．すると，次のことが成り立つ．

定理 3·1·2 アフィン代数群 G は適当な線型代数群と同型である．逆に線型代数群はアフィン代数群である．

この定理の証明の準備を兼ねて，次をまず示そう．

定理 3·1·3 アフィン代数群 G がアフィン代数的集合 V の上に有理的に(左から) 作用しているものとする．V の座標環を R とする．

(イ) G の各元 g がひきおこす R の自己同型 (定理 2·3·1 参照) は線型写像である．すなわち，$a_i\in\Omega, f_i\in R \Rightarrow g(\sum f_ia_i)=\sum(gf_i)a_i$.

(ロ) R の各元 f について，$M_f=\sum_{g\in G} gf\Omega$ とおく．M_f は Ω 上有限生成な G-認容加群である．

(ハ) $M=\sum_{i=1}^n f_i\Omega$ ($f_1,\cdots,f_n$ は Ω 上一次独立) が G-認容な R の部分加群であるとする．G の各元 g に対して，$gf_j=\sum_i f_i(a_{ij}(g))$ なる $a_{ij}(g)\in\Omega$ をとり，$a_{ij}(g)$ を (i,j) 成分にもつ n 次正方行列 $\rho g=(a_{ij})$ を考える．

$G\ni g \to \rho g \in GL(n,\Omega)$ は (代数群としての) 準同型である．g がひきおこす M の上の線型写像(一次変換) は，ρg によって定められる一次変換である．

証明 定理 3·1·3 (イ)：gf ($g\in G$, $f\in R$) の定義は値によって定めた ($gf(x)=f(g^{-1}x)(\forall x\in V)$)．函数の和も値によって定めている ($(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$) から，(イ) の成立は容易にわかる．

(ロ)：G, V がそれぞれ $\boldsymbol{A}^m(\Omega)$, $\boldsymbol{A}^n(\Omega)$ の中の閉集合であると仮定する．$G\times V\ni(g,a)\to ga\in V$ が正則写像であるから，$X_1,\cdots,X_m, Y_1,\cdots,Y_n$ についての多項式 $f_1(X, Y),\cdots,f_n(X, Y)$ が存在して，ga の座標が $(f_1(g, a),\cdots, f_n(g, a))$．$V$ の上の座標系 $(y_1,\cdots,y_n)$ を考えると，$y_i(a)=a_i$, $(gy_i)(a)=y_i(g^{-1}a)=f_i(g^{-1}, a)$．ゆえに，$gy_i=f_i(g^{-1}, y)$ (R の元の算法が値の算法によって定義されているから)．このことは，gy_i が $y_1,\cdots,y_n$ の整式 (係数は g に関係する) で表わされるが，それに出てくる $y_1,\cdots,y_n$ の単項式は，$f_i(X, Y)$ の Y についての単項式に y を代入したものを用いるだけで充分であることを示している．ゆえに，$M_{y_i}=\sum_{g\in G} gy_i\Omega$ は Ω 上有限生成．$f=\sum {y_1}^{i_1}\cdots {y_n}^{i_n}c_{i_1\cdots i_n}$ ($c_{i_1\cdots i_n}\in\Omega$) とすれば，$gf$ は各 y_i を M_{y_i} の一次独立基の一つにおきかえて得られる多項式全体で生成した Ω-加群に含まれるから，M_f も有限生成である．

$h \in M_f \Rightarrow h = \sum_{i=1}^{t} g_i f c_i$ $(g_i \in G,\ c_i \in \Omega) \Rightarrow gh = \sum_{i=1}^{t} (gg_i) f c_i$ $(\forall g \in G)$ $\Rightarrow gh \in M_f$ $(\forall g \in G)$. ゆえに（ロ）が証明された.

（ハ）: 後半は（イ）と ρg の定め方とにより明らか. また ρ が群としての準同型であることも容易.（ロ）における考察をふりかえってみると, $gx_i = \sum m_j c_{ij}(g)$（$m_j$ は $x_1, \cdots, x_n$ の単項式）の形に $c_{ij}(g) \in \Omega$ をとることができたのであるが, この $c_{ij}(g)$ は g^{-1} の座標についての定まった多項式で表わし得る（$f_j(X, Y)$ を Y について整頓した係数でよい）. したがって, $a_{ij}(g)$ は g^{-1} の座標についての定まった整式, したがって, また, g の座標についての定まった整式で表わし得る（$g \to g^{-1}$ が双正則ゆえ）. したがって, $(\det \rho g)^{-1} = \det \rho g^{-1}$ も g の座標の定まって整式で表わし得る. $a_{ij}(g)$ を全部ならべて, $(\det \rho g)^{-1}$ をつけ加えたものが ρg の座標ゆえ, $g \to \rho g$ は正則写像である.

定理 3·1·2: G は G 自身の上に左から有理的に作用するから, 定理 3·1·3 において, $G = V$ のときと考えることができる. G の座標環 $R = \Omega[x_1, \cdots, x_n]$ を考える. $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G} g x_i \Omega$ は G-認容な, Ω の上に有限生成の加群である. 定理 3·1·3,（ハ）を M に適用して得られる表現 ρ をとる. $\rho g = E$（単位行列）$\Rightarrow gx_i = x_i$ $(\forall i)$ $\Rightarrow \forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in G$ について, $a_i = x_i(a) = (gx_i)(a) = x_i(g^{-1}a)$. ゆえに, $g^{-1}a = a$ $(\forall a)$. ゆえに $g = e$（単位元）. ゆえに, ρ の核 $= \{e\}$. したがって, 群としては ρ が同型を与えることがわかった. ρ が正則写像であることは定理 3·1·3 で述べた. あと, ρ^{-1} が正則写像であることを示す必要がある. $\rho g = (a_{ij}(g))$ なる $X_1, \cdots, X_n$ についての多項式 $a_{ij}(X)$ を考える. $x_1, \cdots, x_s$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i \Omega$ の一次独立基であると仮定してよい. $x_1, \cdots, x_s$ を含む M の一次独立基 $x_1, \cdots, x_s,\ y_1, \cdots, y_t$ を考える. ρg がこの一次独立基によって定まったと仮定してよい. $i \leq s$ について, $gx_i = \sum_{j \leq s} a_{ij}(g) x_j + \sum_{j > s} a_{ij}(g) y_{j-s}$ は,（$g^{-1}a$ の i 座標）$= \sum_{j \leq s} a_{ij}(g) a_j + \sum_{j > s} a_{ij}(g) y_{j-s}(a)$ を示している. 特に, $a = e$ とおいて,（g^{-1} の i 座標）が $a_{ij}(g)$ の一次式で表わし得ることがわかる. $g \to g^{-1}$ が双正則ゆえ, このことは ρ^{-1} が正則写像であることを示す. ∎

この定理 3·1·2 により, アフィン代数群を考えるのには, 線型代数群を考えればよいことがわかる.

3・2 対角型行列群

$GL(n,\Omega)$ の部分群 G について：

（イ） $\exists a \in GL(n,\Omega)$, $a^{-1}Ga \subseteq D(n)$＝対角型行列群 のとき，G は**対角化可能**であるといい，

（ロ） 対角化可能な連結代数群であるとき，**トーラス群**であるという．

定理 3・2・1 $GL(n,\Omega)$ の部分群 G が対角化可能ならば，G は可換群である．

証明 $D(n)$ は可換群で，G はその部分群と同型ゆえ，可換である． ∎

トーラス群 T が対角型行列群 $D(n)$ に含まれるものとする．T の上の座標函数は，次の $x_1,\cdots,x_n,d$ だけであると考えてよい．

$$T \ni a=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \text{ のとき，} x_i(a)=a_i,\ \ d(a)=\det a^{-1}=\Pi_i\, a_i^{-1}.$$

すると，次のことがいえる．

定理 3・2・2 $x_1,\cdots,x_n$ の適当な負の指数も許した単項式 $M_i=x_1^{\alpha_{i1}}\cdots x_n^{\alpha_{in}}$ $(i=1,\cdots,r;\ r=\dim T)$ をえらべば，各 x_j は $M_1^{m_1}\cdots M_r^{m_r}$ (m_i は正または負の整数）の形に表わされる．したがって，T の座標環は，$\Omega[M_1,\cdots,M_r,\Pi_i\, M_i^{-1}]$ と一致する．

$$T\cong D(r)\cong (D(1) \text{ の } r \text{ 重直積}).$$

注意 $D(1)$ は $\Omega-\{0\}$（の乗法群）と考える．

証明 n についての帰納法を利用する．

$$T\ni\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1} \end{pmatrix} \in D(n-1) \text{ は代数群としての準同型ゆえ，}$$

ρT もトーラス群（定理 1・1・6 と定理 3・1・1）．$s=\dim \rho T<n-1$ ならば，$x_1,\cdots,x_{n-1}$ の負の指数も許した単項式 $N_1,\cdots,N_s$ を適当にえらべば，各 x_j $(j\leq n-1)$ は $N_1^{m_1},\cdots,N_s^{m_s}$ の形に表わせる．すると

$$a=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho'} \begin{pmatrix} N_1(a) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & N_s(a) & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \text{ なる } \rho' \text{ は同型を与えるから，} \rho' T \text{ につ}$$

いて考えてよく，そのときは n についての帰納法の仮定により正しい．したがって，$\dim \rho T=n-1$ とのときを考えればよい．このことは，$x_1,\cdots,x_{n-1}$ が Ω

上代数的独立ということと同値である．同様にして，$x_1, \cdots, x_n$ のうち，どの $n-1$ 個も代数的独立であると仮定してよい．$\dim T=n$ ならば，$x_1, \cdots, x_n$ は代数的独立であり，明らかに，$T=D(n)$．この場合は定理の主張は正しい．$\dim T<n$ とする．上の仮定により，$\dim T=n-1$．したがって，$\Omega[x_1, \cdots, x_n] \cong \Omega[X_1, \cdots, X_n]/f(X_1, \cdots, X_n)\Omega[X_1, \cdots, X_n]$ （$X_1, \cdots, X_n$ は独立変数）なる既約多項式 $f(X_1, \cdots, X_n)$ がある．$f(X_1, \cdots, X_n)=\sum c_{i_1\cdots i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ $(c_{i_1\cdots i_n}\in\Omega)$ と表わす．T の元 $a=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$ を任意にとれば，$ab=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_nb_n \end{pmatrix}\in T$ ゆえ，$f(b_1x_1, \cdots, b_nx_n)=0$ である（なぜならば，$f(x_1, \cdots, x_n)$ は任意の a について，$(a_1, \cdots, a_n)$ のみたす関係式であり，a を T 内で動かすことと，b をとめておいて，ab を T 内でうごかすこととが同じであるから．）$f(b_1x_1, \cdots, b_nx_n)=\sum c_{i_1\cdots i_n}b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$．これを $x_1, \cdots, x_n$ についての多項式 $f^*(x_1, \cdots, x_n)$ と考えると，$f^*(a_1, \cdots, a_n)=0$ $(\forall a\in T)$ ゆえ，f の一意性により，$f^*=cf$ $(\exists c\in\Omega)$．そこで，上の関係式から，$c_{i_1\cdots i_n}\neq 0 \Rightarrow b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}=c$（一定）．$f(X)$ は既約ゆえ，少くとも二つの $c_{i_1\cdots i_n}$ が 0 でない．$I=\{(i_1, \cdots, i_n) \mid c_{i_1\cdots i_n}\neq 0\}$ とすると，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)\in I$ $(\alpha\neq\beta)$ $\Rightarrow b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n}=b_1^{\beta_1}\cdots b_n^{\beta_n}$．$I$ は b のえらび方には無関係ゆえ，$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}=x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$．そこで，$h(X_1, \cdots, X_n)=X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}-X_1^{\beta_1}\cdots X_n^{\beta_n}$ とおくと，h は f の倍元．f の X_i についての次数を考えれば，I は丁度二個の元から成り，$f(x)$ と $h(x)$ とは同伴であることを知る．ゆえに，h は既約である．X_i の順序はとりかえても，本質的には同じであるから，（$x_1, \cdots, x_n$ のうち，どの $n-1$ 個も代数的独立ということも考えに入れて）上の $f(X)$ が，$X_1^{\alpha_1}\cdots X_s^{\alpha_s}-X_{s+1}^{\beta_{s+1}}\cdots X_n^{\beta_n}$ $(\alpha_i>0,\ \beta_j>0)$ であるとしてよい．（i） $n=2$, $f(X)=X_1^{\alpha}-X_2^{\beta}$ のとき：α と β とは互に素．$\alpha\gamma+\beta\delta=1$ なる整数 γ, δ が出る．$M=x_1^{\delta}x_2^{\gamma}$ とおく．$M^{\alpha}=x_1^{\alpha\delta}x_2^{\alpha\gamma}=x_2^{\beta\delta+\alpha\gamma}=x_2$, $M^{\beta}=x_1^{\beta\delta}x_2^{\beta\gamma}=x_1^{\beta\delta+\alpha\gamma}=x_1$．ゆえに，この場合 M が求める単項式である．（ii） その他のとき：$\alpha_1=1$ ならば，$M_1=x_2, \cdots, M_{n-1}=x_n$ とおけばよい．同様，α_i, β_i のうちに 1 があればよい．$\sum\alpha_i+\sum\beta_j$ についての帰納法を利用する．$\sum\alpha_i+\sum\beta_j\leq 2n-1$ なら，α_i, β_i のうちに 1 があるからよい．$n\geq 3$ または $f(X)=X_1^{\alpha}X_2^{\beta}-1$

ゆえ，$s\geq 2$ としてよい．$\alpha_1\leq\alpha_2$ としてよい．

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1a_2 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

は同型を与えるから，$x_1,\cdots,x_n$ の代りに，$x_1x_2, x_2,\cdots,x_n$ を考えてよい．すると上の関係式は $(x_1x_2)^{\alpha_1}x_2{}^{\alpha_2-\alpha_1}x_3{}^{\alpha_3}\cdots x_s{}^{\alpha_s}=x_{s+1}{}^{\beta_{s+1}}\cdots x_n{}^{\beta_n}$ ゆえ，$\sum\alpha_i+\sum\beta_j$ が小さいとき（または $\alpha_2-\alpha_1=0$ で，上の証明中の ρ に相当するものを適当にとると，$\dim\rho T<n-1$ の場合）になる．よって，帰納法の仮定により証明が終了する． ▮

問 1 Tがトーラス群であれば，$\exists a\in T$, Tがaを含む最小の代数群．

問 2 上の定理 3·2·2 におけるように x_i をとれば，$x_1,\cdots,x_n$ の関係式のイデアル $I=\{f(X_1,\cdots,X_n)\,|\,f(x_1,\cdots,x_n)=0\}$ は二項からなる多項式有限個によって生成される．

可換群Hにおいて，任意の自然数mとHの任意の元aとについて，$\exists b\in H$, $b^m=a$ の成り立つとき，Hは**可除**であるという．

系 3·2·3 トーラス群 T は可除である．

証明 $T\cong D(r)$, $D(r)$ は明らかに可除ゆえ，Tは可除． ▮

補題 3·2·4 群Gにおいて，部分群G_0が，Gの中心に含まれ，さらに，G_0が可除であるとき，$a\in G$, mが自然数，$a^m\in G_0 \Rightarrow \exists b\in G_0a$, $b^m=e$.

証明 $a^m\in G_0$ で，G_0が可除ゆえ，$\exists c\in G_0$, $c^m=a^m$. $c^{-1}a=b$ とおけば，c は中心の元ゆえ，$b^m=c^{-m}a^m=e$. ▮

定理 3·2·5 代数群 T ($\subseteq GL(n,\ \Omega)$) が対角化可能であるとき，T の単位元eを含む既約成分 T_0 をとれば，T/T_0 の各類は位数有限の元を含む．また，T 内の位数有限の元全体を T' とすれば，T は T' の $GL(n,\ \Omega)$ における閉包である．

証明 前半は系 3·2·3 と補題 3·2·4 とにより明白．$T_0\cong D(r)$ ($r=\dim T_0$) ゆえ，T_0 の中で，$T'\cap T_0$ は明らかに稠密．このことと，前半と，定理 1·3·5（または定理 2·2·6）とにより，後半を得る． ▮

系 3·2·6 代数群 $T_1\subseteq T_2\subseteq GL(n,\ \Omega)$ について，T_1, T_2 が共に対角化可能とする．T_2 の位数有限の元がすべて T_1 に属すれば，$T_1=T_2$.

定理 3·2·7 代数群Tが対角化可能とする．Ωの標数が $p\neq 0$ であるとする．qが p のべきであるとき，$T\ni x\to x^q\in T$ なる写像φはTからTの上への準同型であり，群としては同型写像である．

証明 単位元を含む既約成分を T_0 とする．T_0 は可除ゆえ，$\varphi T_0=T_0$. $T\ni t$ について，T_0t の元 t' で位数有限のものをとる．次の補題で示すように，t' の位数 ν は p と素である．ゆえに，自然数 s で，$qs\equiv 1 \pmod{\nu}$ なるものがある．すると，$\varphi(t'^s)=t'^{qs}=t'$. ゆえに $\varphi T\ni t'$. $\therefore$ $\varphi T\supseteq T_0t'=T_0t\ni t$. $\therefore$ $\varphi T=T$. φ が一対一写像であることも次の補題による． ▮

補題 3·2·8 対角化可能な行列 $t\in GL(n, \Omega)$ が位数 ν（有限）ならば，ν は Ω の標数 p の倍数ではない．

証明 t が対角型行列であるとしてよい．

$$t=\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} \quad \text{とすると，} \quad t^\nu=e \Longleftrightarrow t_i{}^\nu=1 \quad (\forall i).$$

標数 $p\neq 0$ の体では，$x^{pm}=1\Rightarrow x^m=1$（ただし m は自然数）ゆえ，位数 ν は p の倍数ではない． ▮

次にトーラス群について，大切な定理を示そう．

定理 3·2·9 連結代数群 G の正規部分代数群 N の既約成分 N_0 で単位元を含むものがトーラス群であり，N が可換群ならば，N は G の中心に含まれる．

証明 $\dim N=n$ ならば，N_0 は n 次の対角型行列群 $D(n)$ と同型である（定理 3·2·2）．ゆえに，$F_m=\{x\in N_0 | x^m=e\}$ は有限群である（位数は，(i) m が万有体 Ω の標数の倍数でないときは，m^n，(ii) $m=m'p^r$，p が Ω の標数，$(m', p)=1$ のときは，m'^n）．m が N/N_0 の位数の倍数であれば，補題 3·2·4 により，$[F_m{}^*=\{x\in N | x^m=e\}$ の元数$]=(F_m$ の元数$)\times(N/N_0$ の位数$)$ となり，これも有限である．N が正規部分群ゆえ，$F_m{}^*$ も正規部分群，定理 1·3·9 により，$F_m{}^*\subseteq Z_G(G)$. $Z_G(G)$ は閉集合であり（系 1·3·3），$\cup_m F_m{}^*$ が N の中で稠密であるから（定理 3·2·5 の証明参照），$N\subseteq Z_G(G)$. ▮

3·3 ユニポテント行列と半単純行列

一般に，行列群 $G\subseteq GL(n, \Omega)$ と，$x_1,\cdots,x_n$ を一次独立基にもつ Ω-加群 $M=\sum x_i\Omega$ とが与えられたとき，G の M の上の**行列群としての作用**とは，$g=(g_{ij})\in G$ のとき，

$$g(\textstyle\sum x_jc_j)=\sum_{i,j} x_ig_{ij}c_j$$

によって定まる作用を意味するものとする（$\sigma_g x_j=\sum x_ig_{ij}$ なる一次写像 σ_g を

g がひきおこすものと定めるのである)．このように M と，その上での G の作用を定めたとき：

定理 3・3・1 G がさらに可換群であれば，M の適当な一次独立基 $y_1, \cdots, y_n$ をとれば，各 $\alpha=1, \cdots, n$ について，$M_\alpha=\sum_{i=1}^{\alpha} y_i\Omega$ が G-認容になる．

証明 この結果は，群の行列表現に関して，よく知られていることであるから，証明の概略だけを述べる：M に含まれる G-認容部分加群 $\neq 0$ で，Ω の上の長さ（次元）が最小のものを M^* とする．M^* は G の既約表現を与える．可換群の既約表現は，Schur の補題により1次である．すなわち，$\mathrm{length}_\Omega M^*=1$．$M^*$ の生成元を y_1 とする．$y_1, \cdots, y_\alpha$ までとれたとき，$\alpha<n$ であれば，同じことを G の表現加群 $M/\sum_{i=1}^{\alpha} y_i\Omega$ に適用すれば，$y_{\alpha+1}$ を得る． ∎

系 3・3・2 可換な行列群 $G\subseteq GL(n, \Omega)$ に対しては，適当な $a\in GL(n, \Omega)$ により，$a^{-1}Ga$ が上半三角行列群 $T(n)=\{(a_{ij})\in GL(n, \Omega) \mid i>j$ ならば $a_{ij}=0\}$ に含まれる．

証明 前定理のように M をとり，$y_1, \cdots, y_n$ を一次独立基として G を表現すれば，上半三角行列群の部分群になる．一次独立基の変換は，表現を共役にうつすから，系を得る． ∎

n 次正方行列の固有値がすべて1であるとき，いいかえれば，a の適当な共役 $b^{-1}ab$ ($b\in GL(n, \Omega)$) が，対角線上が全部1であるような上半三角行列 [(c_{ij}) で，$c_{ii}=1$ ($\forall i$), $i>j$ ならば $c_{ij}=0$] になるとき，a は**ユニポテント行列**であるという．n 次正方行列 b の適当な共役が対角型行列（$i\neq j$ ならば (i, j) 成分が0）になる行列を**半単純行列**という．

注意 a がユニポテント行列ならば，$\det a=1$.

定理 3・3・3 ユニポテント，かつ，半単純な行列 a は単位行列 e である．

証明 a が n 次行列とする．半単純ゆえ，$\exists b\in GL(n, \Omega)$, $b^{-1}ab$ が対角型行列．ユニポテントゆえ，固有値はすべて1．$\therefore\ b^{-1}ab=e$.

$\therefore\ a=beb^{-1}=e.$ ∎

問1 a, b がユニポテント行列 $\in GL(n, \Omega)$ のとき，（イ） ab は必ずしもユニポテントとは限らない，（ロ） $\exists c\in GL(n, \Omega)$, $c^{-1}ac$, $c^{-1}bc$ が共に上半三角行列 $\Rightarrow ab$ はユニポテント．

問2 a, b が半単純行列 $\in GL(n, \Omega)$ のとき，（イ） ab は必ずしも半単純行列とは限らない，（ロ） $\exists c\in GL(n, \Omega)$, $c^{-1}ac$, $c^{-1}bc$ が共に対角型行列 $\Rightarrow ab$ も半単純行列．

定理 3·3·4　$GL(n,\ \Omega)$ において，（イ）　Ω の標数が $p \neq 0$ のときは，$q=p^{n-1}$ とおけば，$a\ (\in GL(n,\ \Omega))$ がユニポテント ⇒ $a^q=e$（単位行列）.
（ロ）　Ω の標数が 0 のときは，a（$\in GL(n,\ \Omega)$）が e でないユニポテント行列ならば，a の位数は無限大であり，a で生成された部分群の閉包 H は，Ω の加法群（$\Omega=\boldsymbol{A}^1(\Omega)$ と考えて，代数的集合としての構造を与えることにより，代数群とみなす）と同型である.

証明　（イ）：共役を考えて，$a=e+b$，$b=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ としてよい．b はべき零：$q=p^{n-1}$ とすれば，$b^n=0$ ゆえ $b^q=0$．$eb=be$ ゆえ，a^q は，二項定理を使って，$e^q+\binom{q}{1}e^{q-1}b+\cdots+b^q$ と展開することができる．$\binom{q}{i}$（$i=1,\ 2, \cdots, q-1$）は p の倍数ゆえ，$a^q=e^q+b^q=e$.

（ロ）：Jordan の標準形を利用して，

$$a=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_s \end{pmatrix},\quad a_i=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n_i,\ \Omega)$$

と仮定してよい．$a_i{}^m$ は $\begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{n_i-1} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & m_2 \\ & & & & m_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{cases} m_\alpha=\binom{m}{\alpha} & (\alpha \leq m) \\ m_\beta=0 & (\beta>m) \end{cases}$

の形．そこで，a^m を作れば，この $a_i{}^m$ を a の a_i のところに入れて

$$\begin{pmatrix} a_1{}^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_s{}^m \end{pmatrix}$$

としたものとなる．したがって，対角線上には 1 がならび，それと平行に m_α が順次，0 を交えながら，ならぶことになる．m_α のならぶところへ，二項係数の多項式表示

$$f_\alpha=\frac{x(x-1)\cdots(x-\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)\cdots 2\cdot 1}$$

をならべる．その多項式を成分にもつ行列をとる.*)

---

*)　$a-e=b$ とおくと $b^n=0$．$\log a=b-(b^2/2)+\cdots+(-1)^{n-2}(b^{n-1}/(n-1))$ とおくと，$a(x)=e+x(\log a)+\cdots+x^{n-1}((n-1)!)^{-1}(\log a)^{n-1}$ となる（これが a^x に相当）.

$$a(x)=\begin{pmatrix} a_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_s(x) \end{pmatrix},\quad a_i(x)=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n_i-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & f_2 \\ & & & \ddots & f_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$a_i(m)=a_i{}^m$. ∴ $a(m)=a^m$. ゆえに, $H=\{a(\alpha)\mid\alpha\in\Omega\}$ は a^m をすべて含む. 明らかに $\boldsymbol{A}^1(\Omega)\ni\alpha\to a(\alpha)\in H$ は双正則 (f_i は x の多項式, $f_1=x$ ゆえ). また, H が ($GL(n,\Omega)$ の中で) 閉集合であることも, 次のようにしてわかる. $GL(n,\Omega)$ の元 (b_{ij}) の座標は b_{ij} 全体と $\det(b_{ij})^{-1}$ であった. $a(\alpha)$ の座標は次の関係式の解である. 簡単のため, $n_1>1$ とする. すると (1,2) 座標は α になる

$$\begin{cases} i>j \Rightarrow X_{ij}=0 \\ X_{ii}=1 \\ X_{i,i+r}=\begin{cases} f_r(X_{12}) & (i,i+r) \text{ が } a_k(x) \text{ の } (j,j+r) \text{ 成分に対応 } \exists(k,j) \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases} \\ \quad (r=1,2,\cdots) \\ \text{最後の座標}=1 \end{cases}$$

逆に, この関係式の解 $b=(b_{ij})$ をとると, $b=a(b_{12})$ であることは明白. ゆえに, H は閉集合である. $\boldsymbol{A}^1(\Omega)$ と双正則なことから, H は既約な閉集合で, $\dim H=1$. さて, $m=1,2,\cdots$ について a^m の (1,2) 成分は $m\neq0$ ゆえ, a の位数は無限大であり, $\{a^m\mid m=1,2,\cdots\}$ は無限集合, ゆえにこの集合の閉包は 1 次元以上の成分をもつ (Zariski 位相だから). $a^m\in H$ ゆえ, H が丁度 $\{a^m\mid m=1,2,\cdots\}$ の閉包になる. 容易に, $a(\alpha)a(\beta)=a(\alpha+\beta)$ ($\forall\alpha,\ \beta\in\Omega$).*) ゆえに, H は群であり, Ω の加法群と同型であることは $\alpha\to a(\alpha)$ の双正則性によりわかった. ▌

定理 3·3·5 $GL(n,\Omega)$ の元 a_λ ($\lambda\in\Lambda$) がすべて半単純行列で, $a_\lambda a_\mu=a_\mu a_\lambda$ ($\forall\lambda,\mu\in\Lambda$) であれば, $\exists c\in GL(n,\Omega)$, $c^{-1}a_\lambda c$ がすべて対角型行列. したがって, $a_\lambda a_\mu$ ($\lambda,\ \mu\in\Lambda$) は半単純である.

証明 $\{a_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ のうち, 対角形であるもの全体を T とする. $a\in T$,

*) $a(x)=(f_{ij}(x))$ とし, また, x,y 独立変数として, $a(x)a(y)=(g_{ij}(x,y))$ なる多項式 $g_{ij}(x,y)$ を考える. $x,\ y$ が自然数値ならば $g_{ij}(x,y)=f_{ij}(x+y)$. このことから $g_{ij}(x,y)=f_{ij}(x+y)$ を得る.

$a=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ としたとき，$a_1, \cdots, a_n$ の順序は共役をとることによって，任意に変え得るから，$n_0=0<n_1<\cdots<n_s=n$ なる整数 n_i によって，$a_i=a_j$ $(\forall a\in T) \Longleftrightarrow \exists\alpha,\ n_{\alpha-1}<i\leq n_\alpha,\ n_{\alpha-1}<j\leq n_\alpha$，としてよい．$T=\{a_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ ならばよい．$b=a_\mu\ (\mu\in\Lambda)$，$b\notin T$ とすると，b はTの任意の元と可換ゆえ，

$$b=\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_s \end{pmatrix},\quad b_i\in GL(n_i-n_{i-1},\ \Omega).$$

各 b_i の Jordan 標準形を b_i の代りにとれば b の Jordan 標準形になるから，b が半単純 ⇒ 各 b_i が半単純．∴ $\exists c_i\in GL(n_i-n_{i-1},\ \Omega)$，$c_i^{-1}b_ic_i$ が対角型行列．すると $c=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_s \end{pmatrix}$ により，$c^{-1}bc$ が対角型行列，$c^{-1}ac=a\ (\forall a\in T)$．

b は対角型行列ではないから，$\exists i$，$c_i^{-1}b_ic_i$ が（単位行列）×（Ω の元）の形にならない．ゆえに，c で変換したあとで，$\{a_\lambda\}$ の中の対角型行列全体をとれば，上の s がもっと大きくなる．ゆえに，この操作は n 回以内で終わり，$\{a_\lambda\}$ の元すべてを同時に対角型にすることができる．　▮

補題 3·3·6　$GL(n,\Omega)$ の部分代数群 T, U, G について，(i) Tは対角化可能，(ii) Uの各元はユニポテント，(iii) T, U で生成した部分群は可換群であり，$G\subseteq TU$ のとき，

（イ）$GL(n,\Omega)$ の元 c と $n_0=0<n_1<\cdots<n_s=n$なる整数 n_i とが存在して，

$c^{-1}Tc$ の元は $\begin{pmatrix} b_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_s' \end{pmatrix}$，$b_i'=b_i\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\in GL(n_i-n_{i-1},\Omega)$，$b_i\in\Omega$，

$c^{-1}Uc$ の元は $\begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_s \end{pmatrix}$，$u_i$ はユニポテントな上半三角行列 $\in$ $GL(n_i-n_{i-1},\Omega)$ の形になる．

（ロ）各 $g\in G$ に対し，$g=t_gu_g$ なる $t_g\ (\in T)$，$u_g\ (\in U)$ を一組ずつ定め，$g\to t_g$ なるGからTの中への写像を φ，$g\to u_g$ なるGからUの中への写像をψとすれば，φ および ψ は正則写像であり，Gは φG，ψG を含み，代数群として，$G=(\varphi G)\times(\psi G)$ とならしめ得る．

（ハ）φG はGの中の半単純行列全体であり，ψG はGの中のユニポテント

な行列全体である.

証明 共役をとって考えてよいから, T が対角型行列群 $D(n)$ の部分群であるとしてよい. T の座標函数 $x_1, \cdots, x_n$, d を, 定理 3·2·1 におけるようにとる. $x_1, \cdots, x_n$ の順序の変換は, 共役をとることによってできるから, $\exists n_\alpha$ $(\alpha=0, \cdots, s;\ n_0=0<n_1<\cdots<n_s=n)$; $x_i=x_j \Longleftrightarrow \exists\beta\geq 1,\ n_{\beta-1}<i\leq n_\beta,\ n_{\beta-1}<j\leq n_\beta$, と仮定してよい. $g\in GL(n, \Omega)$ について, $g=(g_{ij})$ としてみる. $b=\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}\in T$ について, $g=b^{-1}gb$ なる条件は $b_i\neq b_j \Rightarrow g_{ij}=0$. したがって, U の元 u は

$$u=\begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_s \end{pmatrix}, \quad u_i\in GL(n_i-n_{i-1}, \Omega)$$

$u\to u_i$ は準同型ゆえ, $U_i=\{u_i \mid u\in U\}$ は可換群をなすから, 系 3·3·2 により, $\exists\, c_i\in GL(n_i-n_{i-1}, \Omega)$, $c_i^{-1}u_ic_i$ が上半三角行列 $(\forall u_i\in U_i)$. $c=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_s \end{pmatrix}$ で変換すれば, (イ) を得る.

(ロ) は上のように変換した像で考えてよい. G の元は $\begin{pmatrix} x_1 & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_{n-1,n} \\ 0 & & & x_n \end{pmatrix}$ の形をしている. これに相当して, G の上の座標函数 $x_1, \cdots, x_n$, $y_{12}, \cdots, y_{1n}, \cdots, y_{n-1,n}$, Πx_i^{-1} を考える $(x_i\neq x_j \Rightarrow y_{ij}=0)$. この形をみれば, φ, ψ が正則写像であることは明白. 定理 3·1·1 により, φG, ψG は代数群であり, $GL(n, \Omega)$ の閉集合. 定理 3·2·5 の後半により, φG の有限位数の元全体を T^* とすれば, T^* の閉包が φG になる. $t\in T^*$ について, $a\in G$ を $\psi a=t$ であるようにとる. $a=tu$, $u\in U$.

(I) Ω の標数が $p\neq 0$ のとき: $q=p^{n-1}$ により, $G\ni a^q=t^qu^q=t^q$ (定理 3·3·4). 定理 3·2·7 により, $T\ni t\to t^q\in T$ は T から T の上への写像. 位数は, この写像では変らないから, $T^*=\{t^q \mid t\in T^*\}$. ゆえに, $T^*\subseteq G$. ゆえに, T^* の閉包 φG も G に含まれる. $\varphi G\subseteq G$ ゆえ, 作り方から $\psi G\subseteq G$.

(II) Ω が標数 0 のとき: t の位数を α とする. $G\ni a^\alpha=t^\alpha u^\alpha=u^\alpha$. $u=e$ ならば, $t\in G$. $u\neq e$ とすると, u で生成した部分群の閉包 H は Ω の加法群と

同型（定理 3·3·4,（ロ)), $u^\alpha \neq e$. u^α について同じことを考える. u^α で生成した部分群の閉包は H に含まれ，1次元の連結群，ゆえにそれは H. ゆえに, $H \subseteq G$. ∴ $u \in G$. ∴ $t \in G$. ゆえに, $\varphi G \subseteq G$. ゆえに $\psi G \subseteq G$.

かくして，標数に関係なく，$\varphi G, \psi G$ が G に含まれる. ゆえに，群として $G=(\varphi G)\times(\psi G)$ であることはすぐわかる. 代数群として, $G \cong (\varphi G)\times(\psi G)$ であることは次のようにしてわかる: $g \in G$ に対し, $(\varphi g, \psi g) \in (\varphi G)\times(\psi G)$ を対応させる写像 σ を考えると，これが上で考えた群としての同型であるが,（i） φ, ψ の有理性により，σ は有理写像,（ii） σ の逆写像の有理性は, G の算法の有理性により明白.

（ハ） の証明をしよう. G の元 a は

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_s \end{pmatrix}, \quad a_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in GL(n_i - n_{i-1}, \Omega).$$

の形である. a がユニポテント $\Rightarrow \lambda_i = 1\ (\forall i) \Rightarrow a \in \psi G$; また, a が半単純 $\Rightarrow$ $a_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$; これも Jordan の標準形を考えれば（$a_i$ を標準形にすれば, Jordan の標準形になるから）明白. ゆえに（ハ）が示された. ▮

この補題を利用すると，次の重要な定理が出る.

定理 3·3·7 線型代数群 G ($\subseteq GL(n, \Omega)$) の元 a に対し，ユニポテント行列 a_u と半単純行列 a_s とで, $a = a_u a_s = a_s a_u$ をみたすものがある. そして，このような a_u, a_s は a に対して一意的に定まり, a_u, a_s は共に G に属する.

a_u, a_s を a の**ユニポテント因子**, **半単純因子**という.

証明 （イ） 存在: a を Jordan 標準形としてから考えてよい. $a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ の形になれば, $a_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $a_u = a_s^{-1} a$ が条件をみたすことは, Jordan 標準形の形によりわかる.

（ロ） $a_s, a_u \in G$ の証明: $\{a_s, a_u\}, a_s, a_u, a$ で，それぞれ生成された部分群 H_1, T_1, U_1, G_1 を考え，それらの閉包を $H_1^*, T_1^*, U_1^*, G_1^*$ とする. 系 1·3·4 により，これらは全部可換群である. また, $G_1^* \subseteq T_1^* U_1^* \subseteq H_1^*$. 前補題により, $a_s, a_u \in G_1^*$. $G_1^* \subseteq G$ ゆえ, $a_s, a_u \in G$.

（ハ） a_s, a_u の一意性. a_s, a_u に相当する他の組 a_s', a_u' があったとする.

(ロ) により $a_s', a_u' \in G_1^*$. 前補題 (ハ) により, $a_s, a_s' \in T_1^*$, $a_u, a_u' \in U_1^*$. そこで, $a=a_s a_u=a_s' a_u'$ により, $T_1^* \ni a_s'^{-1} a_s=a_u' a_u^{-1} \in U_1^*$

$\therefore\ a_s'=a_s, a_u'=a_u$.

定理 3·3·8 $GL(n, \Omega)$ の中で, ユニポテント行列全体Uは閉集合である. ゆえに, $GL(n, \Omega)$ の閉部分集合F内のユニポテント行列全体 F_u も $GL(n, \Omega)$ の閉集合である. この F_u をFの**ユニポテント部分**という.

証明 a がユニポテント $\Longleftrightarrow (a-e)^n=0$. $(a-e)^n=0$ は a の成分 a_{ij} についての適当な多項式による条件で表わし得るから, Uは閉集合. $F_u=F \cap U$ ゆえ, これも閉集合. ▌

定理 3·3·1 以下, 上にのべたことを利用すると, 補題 3·3·6 は, 次のように条件を弱めることができる.

定理 3·3·9 線型代数群 $G \subseteq GL(n, \Omega)$ が可換であれば, G の中の半単純行列全体 G_s およびユニポテント部分 G_u はそれぞれGの部分代数群をなし, $G=G_s \times G_u$.

証明 系 3·3·2 により, Gは上半を角行列群 $T(n)$ に含まれるとしてよい. すると, G_u はGの元で, 対角線上がすべて1のもの全体になる. ゆえにG_uは部分群をなす. G_u が閉集合であることは定理 3·3·8. 定理 3·3·1 により, G_s は対角化可能ゆえ, 部分群になる. $G \subseteq T(n)$ の仮定をやめれば, G_s が対角型行列群 $D(n)$ に含まれるとしてよく, すると G_s の閉包 G_s^* も $D(n)$ に含まれる. $G_s \subseteq G$ ゆえ, $G_s=G_s^*$ ゆえに, G_s, G_u ともに部分代数群である. 定理 3·3·7 により, $G \subseteq G_s G_u$. ゆえに補題 3·3·6 により, $G=G_s \times G_u$. ▌

系 3·3·10 可換な線型代数群 G ($\subseteq GL(n, \Omega)$) に対して, $\exists c \in GL(n, G)$, $c^{-1}Gc$ の各元は

$a=\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ の形をしていて, その半単純因子 a_sは $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$,

ユニポテント因子が $a_s^{-1}a$ である.

次に, ユニポテント性, 半単純性の準同型による不変性の証明をしよう.

定理 3·3·11 線型代数群 G ($\subseteq GL(n, \Omega)$) から線型代数群 G' ($\subseteq GL(m, \Omega)$) の中への (代数群としての) 準同型 ρ があるとき,

(イ) a ($\in G$) がユニポテントならば ρa もユニポテントであり,

(ロ) a $(\in G)$ が半単純ならば ρa も半単純である.

証明 (i) Ωの標数が0のとき: a, ρa を含む最小の代数群 H, H' をとる. $H'=\rho H$ である. ρの核をNとする. 定理 3·3·4 により, (イ): aがユニポテントでeではないならば, $\dim H=1$ で, Hの位数有限の元は単位元以外にない. $N\cap H\neq\{e\}$ とすると, $N\cap H$ がユニポテントでeでない元を含むから, $N\cap H=H$ となり $H'=\{e\}$. ゆえにこのときは正しい. $N\cap H=\{e\}$とする. すると, $\dim H'=1$ で, H' が位数有限の元を単位元以外にもたないから, このときも(イ)は正しい. $a=e$ なら正しいことは明白である. (ロ): aが半単純であるとしよう. aは対角型行列であるとしてよい. すると, Hは対角型行列群 $D(n)$ に含まれるから, Hの中の有限位数の元全体FはHで稠密である(定理 3·2·5). ゆえに H' の中で ρF は稠密. H' に定理 3·3·9 を適用してみると ($H'=H_s'\times H_u'$ の形にしてみると, 位数有限の元は H_s' の元であるから), H' の元は半単純行列.

(ii) Ωの標数が $p\neq 0$ のとき: (イ): aがユニポテントであればaの位数はpのべき(定理 3·3·4). ゆえに ρa の位数も pのべき, H' に定理 3·3·9 を適用すれば, ρa がユニポテントであることを知る. (ロ): aが半単純のとき, (i)と同様なFをとると, FはHの中で稠密であり, さらにFの元の位数はpと素である. そこで, ρF は H' の中で稠密であり, ρF の元の位数はpと素. ゆえに, H' に定理 3·3·9 を適用して, H' は半単純行列ばかりから成ることを知る. ▌

系 3·3·12 上のような G, G', ρ について, (イ) Gがトーラス群であれば, ρG もトーラス群である. (ロ) G が対角化可能ならば, ρG も対角化可能, (ハ) Gが**ユニポテント群**(すなわち, G のすべての元がユニポテント行列)であるときは, ρG もユニポテント群である.

証明 (ロ): G が対角化可能 ⇒ G 可換 ⇒ ρG 可換. ρG に定理 3·3·11, 系 3·3·10 を適用すると, ρG が対角化可能であることを知る. (イ)は(ロ)から出る. (ハ)は明白. ▌

系 3·3·13 上のような G, G', ρ について,

(イ) $a\in G$ のユニポテント因子, 半単純因子を a_u, a_s とすれば, ρa_u, ρa_s が ρa のユニポテント因子, 半単純因子である.

（ロ） $a'\in\rho G$ がユニポテントならば，適当な G のユニポテントな元 a により，$a'=\rho a$.

（ハ） $a'\in\rho G$ が半単純行列であれば，適当な G の半単純行列 a により，$a'=\rho a$.

証明 （イ）: ρa_u, ρa_s がそれぞれユニポテント，半単純であり，$\rho a=(\rho a_u)(\rho a_s)=(\rho a_u)(\rho a_s)$ ゆえ，明白.

（ロ）: $a_1\in G$ を $\rho a_1=a'$ であるようにとる．a_1 のユニポテント因子 a をとると $\rho a=a'$ であることは，a' が ρa_1 のユニポテント因子であることと，（イ）とによりわかる.

（ハ）: （ロ）で，ユニポテントと言ったところを，半単純といえば，同じ証明で（ハ）がわかる．　▮

3・4 剰　余　類

一般に G が群，R が環，G の各元が R の自己同型を定めるように，G の R の上への左からの作用が定まっているとき，$gf=f$ ($\forall g\in G$) の成立する元 f ($\in R$) が **G-不変**元とよばれるのは当然であるが，さらに，次の定義をする．R が環 R_0 を部分環として含み（単位元は共有とする），R_0 の各元は G-不変とする．Rの元 f が，R_0 の上で，G の**半不変元**である（または，G-**半不変**である）というのは，各 $g\in G$ に対して，$gf=a(g)f$ なる R_0 の元 $a(g)$ の存在するときにいう．a を G で定義された R_0 に値をもつ函数と考え，それを半不変元 f による**指標**という．右から作用しているときも同様に定義する.

代数群 G が代数的集合 V の上に作用しているとき，R として，（イ） V の上で正則な有理函数全体，（ロ） V の上の有理函数，（ハ） V の中の G-認容な部分集合 W をとったとき，W の上で正則な有理函数全体，などと考えた場合，R_0 として万有体 Ω を考え得る．このとき，Ω の上での半不変を，単に**半不変**ということにする.

定理 3・4・1 G が代数群，f が（上のような）半不変元であれば，f による指標 χ は，G から $GL(1,\Omega)$ の中への準同型写像 $g\to\chi(g)$ を定める.

証明は作り方から明白である．各自試みよ．補題付 1・1・1 参照.

G が線型代数群，H がその部分代数群であるとする．定理 2・3・1 によって，

G は G の座標環 R の上に作用する．この作用の下で，

定理 3·4·2 Rの元 $f_1, \cdots, f_s$ を適当にえらべば，（イ） $f_1, \cdots, f_s$ は同じ指標をもつ H の半不変元であり，（ロ） $f_1, \cdots, f_s$ を半不変元にもち，その指標が共通であるような G の部分群は H に含まれる．

証明 $I=\{f \in R \mid f(a)=0\ (\forall a \in H)\}$ は R のイデアル．R は Noether 環であるから，I は有限個の元で生成される：$I=\sum_{i=1}^{n} h_i R$．定理 3·1·3 により，Ω の上に有限生成な加群 M で，G-認容なもので，$M \ni h_i\ (\forall i)$ なるものがある．$N=M \cap I$ とおく．$a \in H \Rightarrow aI=I$ ゆえ，N は H-認容である．M の一次独立基 $k_1, \cdots, k_d$ を，$k_1, \cdots, k_t$ が N の一次独立基であるようにとる．ここで，外積環に関することを利用する（必要な知識は付録で証明をつけて述べる）．M の（Ω の上の）外積環において，t 次斉次元全体のなす加群を F_t とする．F_t の元 $k_1 \wedge \cdots \wedge k_t$ を k^* で示す．G の M の上の作用は，G の F_t の上の作用を定める．H の元によっては，N は N にうつるから，k^* は H の半不変元である．そこで，F_t による G の表現を考え，$G \ni g$ の表現行列を $(x_{ij}(g))$ とかいてみると，（F_t の一次独立基の最初のが k^* として），$g \in H \Rightarrow x_{1j}(g)=0$ $(\forall j>1)$．表現であるから，$g_1 g_2 \in G$ について，$(x_{ij}(g_1))(x_{ij}(g_2))=x_{ij}(g_1 g_2)$．特に $g_1 \in H$ のときを考えると，

$$x_{1j}(g_1 g_2)=\sum_i x_{1i}(g_1) x_{ij}(g_2)=x_{11}(g_1) x_{1j}(g_2).$$

ゆえに，x_{1j} を G の上の有理函数と考えると，$g \in H$ に対して，$g x_{1j}=x_{11}(g^{-1}) x_{1j}$．ゆえに，$x_{1j}$ は共通な指標 χ：$\chi(g)=x_{11}(g^{-1})$ （$x_{1j}(g)=0$ $(\forall j>0)$ ゆえ $x_{11}(g^{-1})=x_{11}(g)^{-1}$ ということがわかる．したがって，$\chi=x_{11}{}^{-1}$）をもつ，H の半不変元である．次に，G の部分群 H' が $x_{11}, \cdots, x_{1d}$ （$d=((x_{ij}(g))$の次数$)=(F_t$ の長さ$)$）を半不変元にもち，その指標が共通な χ であったとする．

$$h \in H' \Rightarrow (h x_{1j})(g)=x_{1j}(h^{-1} g) \quad \text{（作用の定義）}.$$

$$\therefore \quad x_{1j}(h^{-1} g)=\sum_i x_{1i}(h^{-1}) x_{ij}(g) \quad (\forall h \in H',\ \forall g \in G).$$

他方，$h x_{1j}=\chi(h) x_{1j}$ ゆえ，$(h x_{1j})(g)=\chi(h) x_{1j}(g)$．

$$\therefore \quad \sum_i x_{1i}(h^{-1}) x_{1i}(g)=\chi(h) x_{1j}(g) \quad (\forall g \in G;\ j=1, 2, \cdots, d).$$

数ベクトル $a=(x_{11}(h^{-1}), \cdots, x_{1d}(h^{-1}))-(\chi(h), 0, \cdots, 0)$ をとれば，

$a(x_{ij}(g))=(0, \cdots, 0)$ $(\forall g \in G)$．$(x_{ij}(g))$ は正則行列であるから，

$a=(0,\cdots,0)$. ゆえに, $\chi(h)=x_{11}(h^{-1})$, $x_{1j}(h^{-1})=0$ $(\forall j>1)$. ゆえに, H' は, 上で作った, F_t の元 k^* を半不変にする. そのことは, M の上での作用において, H' の元は N を N の中にうつすことを示す. したがって, N で定義された G の閉集合 (N の元の零点集合) H を, その中にうつす. $e\in H$ ゆえ, $h\in H' \Rightarrow h=he\in H$. $\therefore$ $H'\subseteq H$. ▌

定理 3·4·3 G がアフィン代数群, H がその部分代数群ならば, 代数的集合 G/H, $H\backslash G$ が存在する.

証明 上のような G の表現 $\rho=(x_{ij})$ をとる. $d-1$ 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^{d-1}(\Omega)$ の上に, G の右からの作用を, $g\in G$ が $(x_{ij}(g))$ による一次変換 $(a_1,\cdots,a_d)\to(a_1,\cdots,a_d)(x_{ij}(g))$ を引きおこすものと定める. これは G の有理作用であり, 点 $e_1=(1,0,\cdots,0)$ を考えると, $e_1g=e_1 \Longleftrightarrow x_{1j}(g)=0$ $(\forall j>1) \Longleftrightarrow g\in H$ (前定理の証明の最後の段階参照). ゆえに G から e_1 の軌道 e_1G への正則写像は, $H\backslash G$ の元と eG の点との一対一対応を与える. ゆえに定理 2·4·2 により, $H\backslash G$ が代数的集合として存在する. G/H については, 前定理において, 左, 右逆にしたものを用いればよい. ▌

上で, $H\backslash G$ に対応する $\boldsymbol{P}^{d-1}(\Omega)$ の点集合は $\{(x_{11}(g),\cdots,x_{1d}(g)) \mid g\in G\}$ であることに注意しておこう.

定理 3·4·4 G がアフィン代数群, H がその正規部分代数群であれば, G/H はアフィン代数群である.

証明 G の既約成分で e を含むもの G_0 をとる. G が連結のときに証明できれば, $G_0/H\cap G_0$ がアフィン代数多様体になり, したがって, それと双正則なものもアフィン多様体になり, G/H がアフィン代数群となる. ゆえに G が連結と仮定してよい. 上の $\boldsymbol{P}^{d-1}(\Omega)$ の代りに, $\boldsymbol{A}^d(\Omega)$ を考え, G の右からの作用を同様に考える. $S=\{p\in \boldsymbol{A}^d(\Omega) \mid ph=t(h)p\ (\exists t(h)\in\Omega,\ \forall h\in H)\}$ を考える. $\boldsymbol{A}^d(\Omega)$ をベクトル空間と考え, その上への G の作用を上と同様に考えたときの, H の半不変元の集合を考えているのである. $p\in S$, $g\in G$, $h\in H$ のとき, $gh=h'g$ $(\exists h'\in H)$ ゆえ, $pg=p'$ について, $p'h=pgh=ph'g=\lambda(h')pg=\lambda(h')p'$ $(\exists \lambda(h')\in\Omega)$. ゆえに $pG\subseteq S$. また, 点 $e_1=(1,0,\cdots,0)$ は明らかに S の点ゆえ, $e_1G\subseteq S$. e_1G で張られるベクトル空間 M を考え, この一次独立基 $e_1=b_1,b_2,\cdots,b_s$ を, $b_i\in e_1G$ $(\forall i)$ であるようにとる. M を表現

加群とするGの表現ρ_1においては，Hの元hは対角型行列で表現される．$\rho_1 H$は$\rho_1 G$の正規部分群であるから，定理 3·2·9 により，$\rho_1 H$は$\rho_1 G$の中心に含まれる．このことは，$e_1 G$の元に対するGの作用に関しては，$g \in G$とHの任意の元とは可換，すなわち，$g_1, g \in G, h \in H \Rightarrow (e_1 g_1)gh = (e_1 g_1)hg$．そのことを特に$g_1 = e$のときに適用すれば，$p = e_1 g$について，$ph = e_1 gh = e_1 hg = x_{11}(h) e_1 g = x_{11}(h) p$となり，$\rho_1 h = x_{11}(h) e$．ゆえに，$\rho^*$を，$\rho^* g = (\rho g) \otimes {}^t(\rho g)^{-1}$によって定めれば，$\rho^* G \subseteq SL(s, \Omega)$であり，$h \in H \Rightarrow \rho^* h = e$．逆に，$\rho^* g = e$ $(g \in G)$ならば，ρgはλe $(\lambda \in \Omega)$の形であり，点e_1をλe_1にうつすから，e_1のとり方により，$g \in H$．ゆえに，ρ^*の核はHである．$\rho^* G$は$SL(s, \Omega)$の部分代数群ゆえ，$\rho^* G$はアフィン代数群である． ▮

あと，定理 2·5·1, 2·5·2 で述べたことで，（アフィン代数群の場合に）証明していないことについて考えよう．

$H \backslash G$ (H/G)の上にGが右から（左から）自然に有理的に作用することは，あらためて証明する必要はないであろう．あとは，$\dim G/H = \dim H \backslash G = \dim G - \dim H$であるが，このことは，定理 1·1·6 の最後の部分から明らかである．

3·5 Lie-Kolchin の定理

可解群について，次の定理は基本的である．

定理 3·5·1 連結可解線型代数群Gが射影代数的集合Vの上に有理的に作用すれば，Gにより不変なVの点がある．

証明 交換子列 $G = G_0 \supset G_1 = [G, G] \supset \cdots \supset G_i = [G_{i-1}, G_{i-1}] \supset \cdots \supset G_n = \{e\}$の長さ$n$についての帰納法により証明する．（1） $n=1$ のとき：Gは可換群．各$p \in V$に対し，軌道Gpを考える$\dim Gp$が最小であるようなpの一つをp_0とする．Gp_0の閉包$(Gp_0)^*$もG-認容(定理 2·3·2)．$q \in (Gp_0)^* - Gp_0$であれば，$\dim Gq < \dim Gp_0$となり，p_0のとり方に反する．ゆえに，Gp_0はVの中の閉集合，ゆえに，射影多様体．$\{g \in G \mid gp_0 = p_0\}$を$H$とすると，$G/H \ni gH \to gp_0 \in Gp_0$は一対一正則写像．$G$が可換ゆえ，$H$は正規部分群であり，$G/H$はアフィン多様体（定理 3·4·4)．ゆえに，$Gp_0$もアフィン多様体．他方射影多様体でもあったから，$Gp_0$は一点だけ．ゆえに$p_0$は$G$-不変．（2）

$n>1$ のとき：G_{n-1} は連結（系 1·4·2）．（1）により，G_{n-1}-不変な点 $p\in V$ がある．すると，Gp には，G/G_{n-1} が有理的に作用していると考えられる．G/G_{n-1} の交換子列の長さは $n-1$ であるから，帰納法の仮定により，G/G_{n-1}-不変な点 $q\in Gp$ がある．q は明らかに G-不変． ▮

注意 上の証明は，次のことの成立を示している：代数群Gが射影代数的集合の上に有理的に作用していれば軌道のうちに射影代数的集合になっているものがある．

次の系は **Lie-Kolchin の定理** とよばれる．

系 3·5·2 連結可解線型代数群Gのn次の有理表現ρがあったとき，$\exists c\in GL(n,\Omega)$，$\{c^{-1}(\rho g)c|\ g\in G\}$ が上半三角行列群 $T(n)$ に含まれる．いいかえれば，ρ の表現加群Mをとれば，M の適当な一次独立基 $x_1,\cdots,x_n$ により，各 $\alpha=1,\cdots,n$ について，$\sum_{i=1}^{\alpha}x_i\Omega$ が G-認容．

証明 2·3 節，例 2 におけるように，$G\ni g$ は ρg による $\boldsymbol{P}^{n-1}(\Omega)$ の一次変換をひきおこすものと定めると，G の $\boldsymbol{P}^{n-1}(\Omega)$ の上の有理作用になる．p_1 が G-不変とすると，p_1 が $(1,0,\cdots,0)$ となるように $\boldsymbol{P}^{n-1}(\Omega)$ の座標変換をするのに応じて，Mの一次独立基の変換をすると，表現ρは

$$\rho g=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\\ 0 & \\ \vdots\quad \rho_1 g & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

の形になる．ρ_1 も有理表現であるから，同じことを ρ_1 に適用し，nについての帰納法により証明が完了する． ▮

系 3·5·3 連結線型代数群 G（$\subseteq GL(n,\Omega)$）が可解であれば，Gのユニポテント部分 G_u は正規部分群をなし，G/G_u はトーラス群になる．

証明 前系により，G は上半三角行列群 $T(n)$ に含まれるとしてよい．$T(n)$ のユニポテント行列全体 U は明らかに $T(n)$ の正規部分群をなし，$T(n)=D(n)U$（$D(n)$ は対角型行列群），$T(n)/U\cong D(n)$．ゆえに，$G_u=U\cap G$ はGの正規部分群をなし，G/U は $T(n)/U\cong D(n)$ の連結部分代数群と考えられる．ゆえに G/U はトーラス群． ▮

問 上のようなGに，Gのトーラス部分群Tで，$G=TG_u$ なるものがあることは既知として（そのことは，次の節で示される），次のことを示せ：系 3·5·2 におけるcはさらに，$c^{-1}Tc$ が対角型行列群に含まれるようにとれる．［ヒント：系 3·5·2 の証明で，x_i がさらに T_i の半不変元であるようにえらべ．］

3·6 可解群の極大トーラス部分群

一般に，線型代数群Gに含まれるトーラス群全体の中で極大なものを，Gの**極大トーラス部分群**という．後に，極大トーラス部分群は互に共役であること を示す（系 3·7·4）が，連結可解群についてのそのような定理をこの節で示す．

まず，連結べき零群の場合から始めよう（補題 3·9·4 参照）．

定理 3·6·1 連結線型代数群 G $(\subseteq GL(n, \Omega))$ がべき零群であるとき，G の半単純行列全体 G_s はトーラス群をなし，G の中心 $Z_G(G)$ に含まれ，また Gのユニポテント部分 G_u をとれば，$G=G_s \times G_u$.

証明 $\dim G$ についての帰納法を利用する．系 1·4·2 により，$Z_G(G)$ の部分群Cで，連結代数群であって，$\dim C>0$ であるものが存在する．Cは可換ゆえ，定理 3·3·9 により $C=C_s \times C_u$ $(C_s=C \cap G_s,\ C_u=C \cap G_u)$.

（i） $C_s \neq \{e\}$ のとき：定理 3·4·4 により，G/C_s はアフィン代数群．ゆえに，定理 3·1·2 により，G/C_s が線型代数群であるとしてよい．G が連結ゆえ，G/C_s も連結(定理 1·1·6)．$\dim G/C_s < \dim G$ ゆえ，G/C_s については，定理の主張は正しい．$G \to G/C_s$ の自然準同型をρとすると，定理 3·3·13 により，ρG_s, ρG_u が G/C_s の半単純元全体，ユニポテント元全体になる．帰納法の仮定により，$G/C_s=\rho G_s \times \rho G_u$. $G_s=\rho^{-1}(\rho G_s)$（ρ の核が C_s であるから）ゆえ，G_s は部分代数群になる．ρG_s は連結群 ρG の直積因子ゆえ，ρG_s は連結，ゆえに G_s も連結，ゆえに G_s はトーラス群をなす．ρG_s が ρG の正規部分群であるから，$G_s=\rho^{-1}(\rho G_s)$ はGの正規部分群．ゆえに定理 3·2·9 により，G_s はGの中心に含まれる．G_u がGの正規部分群であることは系 3·5·3 で述べた．ゆえに群として，$G=G_s \times G_u$. 代数多様体としても $G_s \times G_u$ になっていることは，Gの元gに対して，半単純因子 g_s, ユニポテント因子 g_u をとり，$g \to (g_s, g_u)$ が $G \to G_s \times G_u$ の双正則写像であることからわかる.*)

（ii） $C_s=\{e\}$ のとき：$C=C_u \neq \{e\}$ である．GからG/C_u への自然準同型をρとする．ρG を線型代数群とみるのは（i）と同様．帰納法の仮定により，$\rho G=\rho G_s \times \rho G_u$ であることも，（i）と同様． $G^*=\rho^{-1}(\rho G_s)$ を考える．$G^*=\{su \mid s \in G_s,\ u \in C_u\}$. $u \in C_u$ に注意すれば，$su=us$ ゆえ，su の半単純因子が

*) 定理の証明の後の問参照.

s，ユニポテント因子が u になる．ρs は ρG の中心元ゆえ，$g\in G$ とすると，$\rho(g^{-1}sg)=\rho s$．このことは，$g^{-1}sg=su$ ($\exists u\in G_u$) を示す．$g^{-1}sg$ は半単純ゆえ，$u=e$．∴ $s\in Z_G(G)$．ゆえに G^* は $Z_G(G)$ に含まれる．そこで $\dim G_s>0$ ならば，$C_s\neq\{e\}$ のときに導き得る．$\dim\rho G_s=0$ ならば，ρG が連結ゆえ，$\rho G_s=\{e\}$．ゆえに $G_s=\{e\}$（ρ の核は C_u ゆえ）．このときは $G=G_u$ となり，定理の主張は明白．∎

問　上の（i）の最後の段階を，次の方針で示せ．
　前節最後の問を利用し，系 3·3·10 と同様な構造を示す．

補題 3·6·2　G, H が線型代数群で，H の G の上の有理作用が定義されていて，各 $h\in H$ を固定したとき，$g\to hg$ は G の（代数群としての）自己同型を定めているものとする．$h\in H$ に対して，

$$M_h=\{(hg)g^{-1}\mid g\in G\},\quad F_h=\{g\in G\mid hg=g\}$$

とおく．このとき，（イ）h が半単純行列 ⇒ $M_h\cap F_h$ の元はすべて半単純行列，（ロ）h がユニポテント ⇒ $M_h\cap F_h$ の元はすべてユニポテント．

証明　$a\in M_h\cap F_h$ とする．$\exists g\in G$, $a=(hg)g^{-1}$ ∴ $ag=hg$. $ha=a$. この h, g を固定する．H から G の中への写像 φ を，$\varphi x=(x^{-1}g)g^{-1}$ ($\forall x\in H$) により定める．これは正則写像である．h を含む最小の代数群 K を考える．F_h が代数群で，$a=\varphi h^{-1}$．そこで，$x,y\in K$ のとき，$\varphi(xy)=((xy)^{-1}g)g^{-1}=(y^{-1}x^{-1}g)(y^{-1}g)^{-1}(y^{-1}g)g^{-1}=(y^{-1}\varphi x)(\varphi y)$ を利用して，まず x,y が h のべきのとき $y^{-1}=\varphi x$, $\varphi(xy)=(\varphi x)(\varphi y)$ を知り，次に一般のときも同じ結果を得る．ゆえに，φ は代数群としての準同型 $K\to F_h$ になる．$a=\varphi h^{-1}$ ゆえ，定理 3·3·11 により（イ），（ロ）が成立する．∎

系 3·6·3　G が線型代数群，N が可換正規部分代数群であるとする．$g\in G$ について，$F_g=\{n\in N\mid ng=gn\}$，$M_g=\{gng^{-1}n^{-1}\mid n\in N\}$ とおく．（イ）g が半単純行列で，N がユニポテント行列ばかりから成るか，または（ロ）g がユニポテント行列で，N が半単純行列ばかりから成るならば，$F_g\cap M_g=\{e\}$ であり，φ: $n\to gng^{-1}n^{-1}$ は M_g から M_g の上への一対一準同型を与え，$N=F_gM_g$．もし（イ），（ロ）の一つが成立し，さらに，N が連結であれば，F_g も連結である．

証明　前補題での G,H として，ここの N,G を考え，作用として，(g,n)

$\rightarrow gng^{-1}$ と考える．すると，F_g, M_g は同じ意味をもつ．半単純で，しかもユニポテントならば単位元ゆえ，$F_g \cap M_g = \{e\}$．φ が N から M_g の上への準同型ということは N の可換性により容易．N は正規部分群ゆえ，$M_g \subseteq N$．$\varphi n = e \Longleftrightarrow gn = ng \Longleftrightarrow n \in F_g$．ゆえに，$n \in M_g$, $\varphi n = e \Rightarrow n = e$．ゆえに φ は M_g から M_g の中への一対一対応を与える．まず，M_g の e を含む連結成分 $(M_g)_0$ について，$\varphi(M_g)_0 = (M_g)_0$（定理 1·1·6 と定理 3·1·1）．
$\therefore$ $\varphi M_g = M_g$．また $M_g \subseteq N$．$\therefore$ $F_g M_g \subseteq N$．$\varphi N = M_g = \varphi M_g$．
$\therefore$ $N = F_g M_g$, $\dim N = \dim F_g + \dim M_g$．$F_g \times M_g \ni (a, b) \rightarrow ab \in N$ なる写像 ψ を考えると，$F_g \cap M_g = \{e\}$ ゆえ，ψ は一対一．N が連結としよう．$\psi(F_g \times M_g) = N$．このことは，F_g の e を含む既約成分 $(F_g)_0$ をとっても，同じで，$\psi((F_g)_0 \times M_g) = N$．ゆえに $F_g = (F_g)_0$．　▮

系 3·6·4　G が線型代数群$\subseteq GL(n, \Omega)$，Nが正規部分代数群，$a \in GL(n, \Omega)$，$aGa^{-1} = G$ とする．$x \rightarrow axa^{-1}$ なる G から G の中への写像 φ を考える．φ が N の上で恒等写像であり，G/N へ φ が導く写像も恒等写像であるものとし，（イ）　a が半単純で N のすべての元がユニポテントであるか，（ロ）　a がユニポテント行列で，N のすべての元が半単純であるならば，$ax = xa$ ($\forall x \in G$)．

証明　G の $GL(n, \Omega)$ における正規化群 H を考え，補題 3·6·2 を適用する（作用は，$(h, g) \rightarrow hgh^{-1}$）．$a \in H$ ゆえ，その意味で F_a, M_a が作れる．φ が N 上で恒等写像ゆえ，$N \subseteq F_a$．φ が G/N で恒等写像を定めることは，$x^{-1}axa^{-1} \in N$ ($\forall x \in G$) を意味する．ゆえに $M_a \subseteq N$．$\therefore$ $F_a \cap M_a = M_a$．（イ）または（ロ）の成立により，$F_a \cap M_a = \{e\}$．$\therefore$ $M_a = \{e\}$．　▮

補題 3·6·5　G が連結線型代数群で可解であるものとする．G のユニポテント部分 G_u が可換であり，トーラス部分群 T で，$G = TG_u$ なるものが存在するものと仮定する．s ($\in G$) が半単純行列ならば，$\exists\, a \in G_u$, $a^{-1}sa \in T$．

証明　$s = tu$ なる $t \in T$, $u \in G_u$ が存在する．系 3·6·3 を，$N = G_u$, $g = t^{-1}$ のときに適用する．$u = fm$ ($f \in F_g$, $m \in M_g$)．また，φ: $x \rightarrow t^{-1}xtx^{-1}$ により，$\varphi G_u = M_g$．　$\therefore$ $\exists a \in G_u$, $t^{-1}a^{-1}ta = m^{-1}$．　$a^{-1}sa = (a^{-1}ta)(a^{-1}ua) = tm^{-1}u = tf$．$f \in F_g$ ゆえ，$tf = ft$．ゆえに $a^{-1}sa$ の半単純因子，ユニポテント因子がそれぞれ t, f である．$a^{-1}sa$ は半単純ゆえ，$a^{-1}sa = t$．　▮

G が連結可解線型代数群で，$G = G_0$, $G_i = [G_{i-1}, G]$, $G^* = \cap_i G_i$ とおく．

定理 3·6·6 上の記号の下で，T, T' が G の極大トーラス部分群であれば，$\exists a \in G^*$, $T'=a^{-1}Ta$. また，G のユニポテント部分 G_u をとれば，G は T と G_u との**半直積**（すなわち，群として $G=TG_u$ であり，さらに写像 $(t, u) \to tu$ は $T\times G_u$ から G の上への双正則写像を与える）である．

証明 $\dim G$ についての帰納法を利用する．まず G がべき零であれば，定理 3·6·1 により正しい．一般のとき，$G^* \subseteq G_u$（系 3·5·3）に注意しておこう．G から G/G^* への自然準同型を φ とする．φG は連結べき零線型代数群ゆえ，半単純元全体 G_s'' とユニポテントな元全体 G_u'' とは連結代数群をなし，$\varphi G = G_s'' \times G_u''$. 定理 3·3·11 により，$G_u''=\varphi G_u$, $\varphi T \subseteq G_s''$, $\varphi T' \subseteq G_s''$.

（i） $G_u'' \neq \{e\}$ のとき：$H=\varphi^{-1}(G_s'')$ は T, T' を含み，$\dim H < \dim G$. G^* が連結，G_s'' も連結ゆえ H が連結．ゆえに，$\exists a \in H^* = \cap_i H_i$ ($H_0=H$, $H_i=[H_{i-1}, H]$), $a^{-1}Ta=T'$. $H^* \subseteq G^*$ ゆえ，この場合の証明が完了した．

（ii） $G_u''=\{e\}$ とする．$G_u=G^*$. $\varphi T=T''$ はトーラス群．$\varphi T=\varphi G$ を示そう．そうでないとする．$\varphi^{-1}(T'')$ は連結で，次元 $<\dim G$ ゆえ，$\varphi^{-1}(T'')$ の極大トーラス群は互に共役．他方 $\forall g \in G$, $g^{-1}(\varphi^{-1}(T''))g=\varphi^{-1}(T'')$. $\therefore$ $g^{-1}Tg \subseteq \varphi^{-1}(T'')$. $\therefore$ $\exists u \in \varphi^{-1}(T'') \cap G_u = G_u$, $g^{-1}Tg=u^{-1}Tu$. このことは T の G における正規化群 N をとると，$gu^{-1} \in N$ を示す．ゆえに，$G=NG_u$. N の e を含む既約成分 N_0 をとれば，G は連結ゆえ，$N_0G_u=G$. 定理 3·2·9 により，T は N_0 の中心に含まれる．（イ） $N_0=G$ のとき：T' が可換で，T の中心化群に含まれるのだから，TT' は可換群をなす．連結でもあるから，唯一つの極大トーラス部分群をもち，$T=T'$ であり，T は G の半単純行列全体になる．$g'' \in T'' \Rightarrow \exists$ 半単純行列 s, $\varphi s=g''$（定理 3·2·11）ゆえ $\varphi T=\varphi G$. したがって $G=TG_u$ でもある．（ロ） $N_0 \neq G$ のとき：$\dim N_0 < \dim G$ ゆえ，帰納法の仮定により，$N_0=TN_u \subseteq TG_u$. $\therefore$ $G=NG_u=TG_u$.

あと，（ii）の仮定 $G^*=G_u$ の下で，定理の証明をつづける．

（iii） G_u が可換のとき：T' の元 b で，$\{b^n \mid n=0, \pm 1, \cdots\}$ の閉包が T' であるものをとる（定理 3·2·2 の後の問 1）．補題 3·6·5 により，$\exists a \in G_u$, $a^{-1}ba \in T$. すると $a^{-1}T'a \subseteq T$. T' は極大トーラス部分群ゆえ，$a^{-1}T'a=T$.

（iv） G_u が可換でないとき：$K^*=[G_u, G_u]$ とおくとこれは連結正規部分群である．G_u が可換でないから，$\dim K^* \geq 1$. $\therefore$ $\dim G/K^* < \dim G$.

G から G/K^* への自然準同型を ρ とする.（ii）により $G=TG_u$ ゆえ, $\rho G=(\rho T)(\rho G_u)$. ゆえに ρT は ρG の極大トーラス部分群であり, 同様に, $\rho T'$ も極大トーラス部分群である（$\dim \rho G<\dim G$ ゆえ, 帰納法の仮定による). $\exists b\in G_u$, $(\rho b)^{-1}(\rho T)(\rho b)=\rho T$. T' の代りに $bT'b^{-1}$ を考えることにより, $\rho T=\rho T'$ と仮定してよい. すると, T, T' は $\rho^{-1}(\rho T)$ の極大トーラス部分群であり, 帰納法の仮定により, $\exists c\in\rho^{-1}(\rho T)\cap G_u$, $c^{-1}Tc=T'$.

以上で, $\exists a\in G^*$, $a^{-1}Ta=T'$ の証明ができた.

(iv) G が T と G_u との半直積であることは, 定理 3·6·1 のあとの問におけると同様にして示される. ▌

系 3·6·7 G が連結可解線型代数群, G_u がユニポテント部分, T が極大トーラス部分群とする. ρ が G から線型代数群 G' の中への準同型であるとき,

（イ） ρG_u は ρG のユニポテント部分であり,

（ロ） ρT は ρG の極大トーラス部分群である.

証明 （イ）は系 3·3·12, 3·3·13 により明白. ρT がトーラス群であることは系 3·3·12. $G=TG_u$ ゆえ, $\rho G=(\rho T)(\rho G_u)$. ゆえに ρT は極大トーラス部分群. ▌

3·7 Borel 部分群（1）

G がアフィン代数群であるとき, G の連結可解部分代数群のうち極大なものを G の **Borel 部分群** という. これは, 下に示すように, よい性質をもっているが, ここに紹介する以外にも, 重要な役割を演じている例がある. 例えば, 近年 Chevalley によって示された半単純群の構造についての理論*) には, Borel 部分群が大いに活躍している.

Borel 部分群の基本的性質は, 次の定理に述べられる.

定理 3·7·1 G がアフィン代数群であるとき,

（イ） G の Borel 部分群 B, B' は互に共役である.

（ロ） G の部分代数群 H について,

$$G/H \text{ が射影代数的集合} \Longleftrightarrow H \text{ が適当な Borel 部分群を含む}.$$

*) Classification des groups de Lie algébriques（まえがきにあげた文献［2］参照). なお, 同書においては, G が連結のときには, Borel 部分群は極大な可解部分群といっても同じであることが示されている.

この定理を証明するため，少し準備をする．

射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ と有理整数 r $(0\leqq r\leqq n)$ を固定する．$n-r$ 個の一次独立な一次斉次式 $\sum_{j=0}^n c_{ij}X_j$ で定義される $\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の中の代数多様体を，r 次元の**線型空間**という．これは，適当な一次変換をすれば，$\boldsymbol{P}^r(\Omega)$ $(\subseteq\boldsymbol{P}^n(\Omega))$ と考えられるもの，といっても同じである．

r 次元線型空間 L $(\subseteq\boldsymbol{P}^n(\Omega))$ は $r+1$ 個の一次独立な点で張られる．その点を $a_i=(a_{i0},\cdots,a_{in})$ $(i=0,\cdots,r)$ とするとき，$\{0,\cdots,n\}$ のうちの互に異なる $r+1$ 個の数 $i_0,\cdots,i_r$ について，次のようにおく．

$$p_{i_0\cdots i_r}=\det\begin{pmatrix} a_{0i_0} & a_{0i_1}\cdots\cdots a_{0i_r}\\ a_{1i_0} & a_{1i_1}\cdots\cdots a_{1i_r}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{ri_0} & a_{ri_1}\cdots\cdots a_{ri_r}\end{pmatrix}$$

これら $p_{i_0\cdots i_r}$ については，添字の二つを互に交換すると -1 倍になることは明白である．さて，これら $p_{i_0\cdots i_r}$ のうち，$i_0<i_1<\cdots<i_r$ であるもの全体を，一定の順序（例えば，$(i_0,\cdots,i_r)$ の辞書式順序）で並べたものを $\boldsymbol{P}^N(\Omega)$ $\left(N=\binom{n+1}{r+1}-1\right)$ の点の座標と考え，L に対して，この点 $(\cdots,p_{i_0\cdots i_r},\cdots)$ を対応させる．このようにして，$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の r 次元線型空間全体を，$\boldsymbol{P}^N(\Omega)$ の部分集合に対応させて考える．$(\cdots,p_{i_0\cdots i_r},\cdots)$ を L の **Plücker 座標**という．L は（Plücker 座標による）点を定め（すなわち，L を張る点 $a_0,\cdots,a_r$ をとりかえても，Plücker 座標の比は不変である），逆に同じ点を定める L は同一である．（L をとりかえて）Plücker 座標になり得る $\boldsymbol{P}^N(\Omega)$ の点の全体を V_r とすると，V_r は射影多様体になる（これらのことは，付録で証明する）．

次に，上の r を，$0,1,\cdots,n-1$ 全部について考え，直積 $V_0\times V_1\times\cdots\times V_{n-1}$ を作る．$\boldsymbol{P}^n(\Omega)$ の線型空間 $L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}$ で，$\dim L_i=i$，$L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_{n-1}$ であるものに対し，まず L_i の Plücker 座標による点 P_i をとり，それらの積 $P_0\times\cdots\times P_{n-1}$ を考える．すると，このような $P_0\times\cdots\times P_{n-1}$ 全体 $F^{(n)}$ は射影多様体をなす．（このことの証明も付録にゆずる．）上のような $L_0,\cdots,L_{n-1}$ の組を**旗**といい，$F^{(n)}$ を**旗多様体**という．

$GL(n,\Omega)$ に含まれる代数群 G をとると，G は $\boldsymbol{P}^N(\Omega)$ の上に左から有理的

に作用する（定理 2·3·1 の前の例1）．Lが r 次元線型空間で，$a_0, \cdots, a_r$ が Lを張るとき，gL ($g \in G$) は $ga_0, \cdots, ga_r$ で張られる．ゆえに，Gは V_r の上にも（左から）有理的に作用する．ゆえに，$F^{(n)}$ の上にも，Gは有理的に作用する．この状況の下で，

補題 3·7·2 Gの連結部分代数群 Hについて，H が可解 $\Longleftrightarrow \exists p \in F^{(n)}$, $hp=p$ $(\forall h \in H)$.

証明 ⇒は定理 3·5·1 により明らか．⇐：p に対応する旗を $L_0, \cdots, L_{n-1}$ とする．$L_0, \cdots, L_{n-1}, L_n = \boldsymbol{P}^n(\Omega)$ に対応するベクトル空間を $M_0, \cdots, M_n$ とすると，$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$, $\dim M_i = i+1$ で，各 M_i が H-認容になっている．ゆえに，一次独立基の変換により，H は上半三角行列群 $T(n)$ の部分群になる（すなわち，$\exists a \in GL(n, \Omega)$, $a^{-1}Ha \subseteq T(n)$）．ゆえに H は可解． ▮

補題 3·7·3 G の Borel 部分群 B^* で，G/B^* で射影代数的集合であるものが存在する．

証明 Gが連結と仮定してよい．G が射影多様体 $F^{(n)}$ の上に有理作用をもつのであるから，$\exists p \in F^{(n)}$, 軌道 Gp が射影多様体（定理 3·5·1 のあとの注意）．$H^* = \{h \in G \mid hp = p\}$ とおくと，$G/H^* \ni aH^* \to ap \in Gp$ は一対一の正則写像．ゆえに G/H^* は射影多様体（定理 2·1·7, 2·5·1）．H^* の既約成分で単位元 e を含むものを B^* とする．$G/B^* \ni aB^* \to aH^* \in G/H^*$ は m 対 1 (m は H^* における B^* の指数）の正則写像であるから，G/B^* も射影多様体（定理 2·1·7, 2·5·1）．pとしては，$\dim Gp$ が最小になるようにとればよかった．そのときは，B^* は，前補題の条件をみたす H^* のうち，次元の最大なものといえる．ゆえに，B^* より本当に大きい，Gの連結可解部分群は存在しない．ゆえに，このとき，B^*は Borel 部分群． ▮

以上の準備の上で，<u>定理 3·7·1 の証明</u>をしよう．

（イ）：単位元 e を含むGの既約成分を G_0 とする．B, B' は連結ゆえ，$B, B' \subseteq G_0$. ゆえに，（イ）の証明のためには，$G=G_0$ と仮定してよい．補題 3·7·3 における Borel 部分群 B^* をとる．$B \subseteq G$ は射影多様体 G/B^* の上に左から有理的に作用する．Bは連結可解ゆえ，$\exists aB^* \in G/B^*$, $BaB^* = aB^*$.
$\therefore$ $a^{-1}BaB^* = B^*$. $\therefore$ $a^{-1}Ba \subseteq B^*$. $\therefore$ $B \subseteq aB^*a^{-1}$. B が Borel 部分群，aB^*a^{-1} が連結可解ゆえ，$B = aB^*a^{-1}$. B' も同様 B^* の共役である．

(ロ): G/H が射影代数的集合ならば，B の左からの有理作用を考え，上と同様にして，$\exists c\in G$, $c^{-1}Bc\subseteq H$. ゆえに H は Borel 部分群 $c^{-1}Bc$ を含む. 逆に，H が B を含んだと仮定しよう. G/B と G/B^* とは双正則 ($xB\to a^{-1}xa(a^{-1}Ba)=a^{-1}xaB^*$ により) であるから，G/B も射影代数的集合. $G/B\ni xB\to xH\in G/H$ は正則写像. ゆえに G/H も射影代数的集合 (定理 2・1・4). ▮

系 3・7・4 線形代数群 G において，T, T' が極大トーラス部分群であれば，$\exists a\in G$, $a^{-1}Ta=T'$.

証明 T, T' はいずれも連結可解. ゆえにそれぞれを含む Borel 部分群 B, B' がある. $\exists c\in G$, $c^{-1}Bc=B'$. すると，$cT'c^{-1}\subseteq B$. T, $cT'c^{-1}$ は B の極大トーラス部分群ゆえ，定理 3・6・6 により，$\exists b\in B$, $bcT'c^{-1}b^{-1}=T$. ゆえに $bc=a$ が求むるものである. ▮

問 1 線型代数群 G の Borel 部分群 B をとる. B の極大トーラス部分群は G の極大トーラス部分群である.

定理 3・7・5 連結線型代数群 G がアフィン代数的集合 V の上に有理的に作用するものとする. $a\in V$ の固定化群 $S_a=\{g\in G\mid ga=a\}$ が Borel 部分群を含むならば，$Ga=a$, $G=S_a$.

証明 軌道 Ga の上へ，G/S_a から一対一の正則写像がある. 仮定と定理 3・7・1 とにより，Ga は射影多様体. 他方，$Ga\subseteq V$ かつ V がアフィン代数的集合ゆえ，Ga は一点から成る. ▮

系 3・7・6 G が連結線型代数群で，M が G の (代数群としての) 表現加群であるとき，$f\in M$ について，$S_f=\{g\in G\mid gf=f\}$ が Borel 部分群を含めば，$Gf=f$, $S_f=G$. ▮

証明 $M=A^n(\Omega)$ ($\exists n$) と考えてよいことから出る.

系 3・7・7 連結線型代数群 G ($\subseteq GL(n,\Omega)$) において，次の四条件は互に同値である.

(イ) G の極大トーラス部分群は $\{e\}$.

(ロ) G の元 a が半単純行列ならば，a の位数は有限.

(ハ) G の元はすべてユニポテントである.

(ニ) (ハ) が成立し，さらに，G はべき零である.

証明 G の Borel 部分群の一つ B をとる．定理 3·6·6 により，$B=TB_u$（T はトーラス群，B_u は B のユニポテント部分）．（イ），（ロ），（ハ）のいずれかが成立したとする．すると，$B=B_u$．Lie-Kolchin の定理により，Bは上半三角行列群 $T(n)$ に含まれるとしてよい．G を $A^n(\Omega)$ に作用させる（行列の算法で；2·3 節，例 1）．点 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，…，$e_n=(0,\cdots,0,1)$ をとる．e_1 は B-不変である（$B=B_n$ ゆえ）．ゆえに定理 3·7·5 により，$Ge_1=e_1$．このことはGの任意の元 b について $b=\begin{pmatrix} 1 & (*b) \\ 0 & \\ \vdots & \rho(b) \\ 0 & \end{pmatrix}$ の形であることを示す．

$b\to\rho(b)$ は有理表現ゆえ，$G'=\{\rho(b)\}$ を考え，n についての帰納法を適用すれば，$G\subseteq$($T(n)$ のユニポテント部分）を知る．ゆえに（ニ）が成立する．（ニ）が成り立てば，他が成立することは，定理 3·6·1 により明白．∎

系 3·7·8 連結可解線型群Gの一つの極大トーラス部分群 T が G の正規部分群であれば，Gはべき零である．

証明 G/T は系 3·7·7 の条件（イ）をみたす．ゆえに G/T はべき零，定理 3·2·9 により，TはGの中心に含まれる．ゆえに，Gはべき零．∎

補題 3·7·9 B が連結線型代数群 G の Borel 部分群のとき，B の中心化群 $Z_G(B)=\{x\in G|\ xb=bx\ (\forall b\in B)\}$ はGの中心 $Z_G(G)$ と一致する．

証明 $Z_G(G)\subseteq Z_G(B)$ は明白．逆の包含関係を示そう．$G\times G\ni(a,\ x)\to axa^{-1}\in G$ により，G の，G 自身の上への有理作用を考える．$x\in Z_G(B)$ なら，x はB-不変．ゆえに定理 3·7·5 により x は G-不変である．すなわち，$x\in Z_G(G)$．∎

問 2 連結線型代数群Gにおいて，一つの極大トーラス部分群を T とする．このとき，次の三条件は互に同値である．

（イ） Gはべき零である．

（ロ） Gの Borel 部分群はべき零である．

（ハ） $T\subseteq Z_G(G)$

定理 3·7·10 連結線型代数群 G において，一つの極大トーラス部分群 T の正規化群 N の既約成分で e を含むもの N_0 をとる．（イ） N_0 は T の中心化群 $Z_G(T)$ の既約成分である．[*]（ロ） Tを含むGの Borel 部分群は N_0 を含む．

---

[*] 実は $N_0=$(T の中心化群）である．定理 3·9·3 参照．

証明　(イ) は定理 3・2・9 により明白. (ロ): N_0 はべき零 (上の問) ゆえ, Borel 部分群 B' で N_0 を含むものがある. B' の極大トーラス部分群 T' は B' 内で T と共役 ($\exists b\in B'$, $T'=b^{-1}Tb$) ゆえ T' の正規化群の既約成分 N_0' を B は含む. $N_0'=b^{-1}N_0b$ ゆえ, 定理が成立する. ▮

定理 3・7・11　Gが線型代数群, H が部分代数群で, Gの適当な Borel 部分群 B を含むものとする. H の G での正規化群Nの既約成分で e を含むものを N_0 とすると, $N_0\subseteq H$ である.

証明　B は N_0 の Borel 部分群である. ゆえに定理 3・7・1 (ロ) により, $N_0/H\cap N_0$ は射影多様体である. 他方, $H\cap N_0$ は N_0 の正規部分群であるから, $N_0/H\cap N_0$ はアフィン多様体 (定理 3・4・4). ゆえに $N_0/H\cap N_0$ は一点から成る. すなわち, $N_0\subseteq H$. ▮

3・8　Borel 部分群 (2)

ここでは, まず次の定理の証明と, その応用を扱う.

定理 3・8・1　G が代数群, H が部分代数群で, (イ) G/H は射影多様体, (ロ) Hの共役全体の和集合UはGの中で稠密とする. このとき, $G=U$, すなわち, $\forall g\in G$, $\exists c\in G$, $g\in c^{-1}Hc$.

証明　$U=\{g^{-1}hg|\ g\in G,\ h\in H\}$. これは $G\times H\ni(g, h)\to g^{-1}hg\in G$ なる正則写像による$G\times H$ の像ゆえ, UはGの各既約成分 G_0a ($a\in G$, G_0 は e を含む既約成分) の空でない開集合を含む (定理 1・1・6). $G\times(G/H)$ において, $T=\{(g, xH)|\ g(xH)=xH\}$ とおく. $G\times(G/H)\ni(g, xH)\to g(xH)\in G/H$ は G の G/H の上での有理作用を定めるから, $g(xH)=xH$ は g および xH の座標に関する多項式 (xH の座標に関しては斉次) $=0$ の条件で表わし得る. ゆえに T は $G\times(G/H)$ の閉集合である. T から $G, G/H$ への射影をそれぞれ φ, ψ とする. $\forall xH$, $(xhx^{-1},\ xH)\in T$ ($\forall h\in H$) ゆえ, $\psi T=G/H$. また, $\varphi T\supseteq U$ は明白であるから, TはGと G/H との対応である. 定理 2・1・8 により, $\varphi T=G$. $\therefore$ $\forall x\in G$, $\exists(x, yH)\in T$. $\therefore$ $xyH=yH$. $\therefore$ $y^{-1}xyH=H$. $\therefore$ $y^{-1}xy\in H$. $\therefore$ $x\in yHy^{-1}$. $\therefore$ $x\in U$. $\therefore$ $G\subseteq U$. ▮

上の定理の条件 (イ) はアフィン代数群の場合には定理 3・7・1, (ロ) で与えられている. 条件 (ロ) を考えるため, それに関連したことを若干証明しよう.

定理 3·8·2　Gが代数群，Hが部分代数群，NがHの正規化群，$\delta=\dim N/H$ とする．$U=\cup_{x\in G}x^{-1}Hx$ の閉包 U^* をとると，（イ） U は U^* の各既約成分の空でない開集合を含む，（ロ） $\dim U^*\leq\dim G-\delta$，（ハ） $\dim U=\dim G-\delta\Longleftrightarrow\exists x\in H$，$x$ を含む H の共役は有限個しかない，（ニ） G，H が共に連結ならば U^* は既約．

証明　（イ）は $G\times H\ni(g,\ h)\to g^{-1}hg\in G$ により，前定理の証明の最初と同様．また（ニ）も明白(定理 1·1·6)．（ロ）: $G\times G/N$ の中で，$T=\{(g,\ xN)|\ g(xH)=xH\}$ を考えると，前定理の証明と同様として，T は $G\times G/N$ の閉集合．T から G, G/N への射影 φ, ψ をとれば，$\varphi T=U$，$\psi T=G/N$ も前定理の証明と同様．$bN\in G/N\Rightarrow\psi^{-1}(bN)=\{(a,\ bN)|\ a\in bHb^{-1}\}$．$\therefore$ $\dim\psi^{-1}(b)=\dim H$．$\therefore$ $\dim T=\dim G/N+\dim H=\dim G-\delta$．$\varphi T=U$ ゆえ，$\dim U^*\leq\dim G-\delta$．（ハ）: 上の計算をふり返ると，$T$ は純$(\dim G-\delta)$ 次元であることがわかる．$a\in U\Rightarrow\varphi^{-1}(a)=\{(a,\ bN)|\ a\in bHb^{-1}\}$．さて，$\Leftarrow$ の証: $\dim\varphi^{-1}(x)=0$ $(\exists x\in H)$ ゆえ，$\dim U=\dim T=\dim G-\delta$．$\Rightarrow$ の証：$\exists$(U^* の既約成分) U'，$\dim U'=\dim T$．$\exists a\in U\cap U'$，$\dim\varphi^{-1}(a)=0$．$a=chc^{-1}$ $(\exists h\in H,\ \exists c\in G)$．$(h,\ dN)\in T\Longleftrightarrow h\in dHd^{-1}\Longleftrightarrow a\in cdHa^{-1}c^{-1}$ ゆえ，h を含む H の共役は有限個しかない．▮

系 3·8·3　G が連結代数群，H が部分代数群で，(i) $\exists x\in H$，x を含むHの共役は有限個，(ii) Hの正規化群Nにおいて，Hの指数は有限であるときは，Hの共役全体の和集合UはGの中で稠密で，Gの空でない開集合を含む．

補題 3·8·4　B が線型代数群Gの Borel 部分群，T が極大トーラス部分群であるとする．T のG における正規化群をNとする．（イ） $c\in G$，$c^{-1}Bc\supseteq T\Rightarrow\exists a\in N$，$c^{-1}Bc=a^{-1}Ba$．（ロ） Tを含むGの Borel 部分群は有限個しか存在しない．

証明　（イ）: $cTc^{-1}\subseteq B$ ゆえ，T と cTc^{-1} とはBの中で共役(定理 3·6·6): $\therefore$ $\exists b\in B$，$cTc^{-1}=b^{-1}Tb$．ゆえに $a=bc\in N$ をとればよい．（ロ）: N の既約成分で e を含むもの N_0 をとれば，$N_0\subseteq B$ (定理 3·7·10)．ゆえに，（イ）により，（ロ）が出る．▮

さて，定理 3·8·1 の重要な応用を示そう．

定理 3·8·5　Gが連結線型代数群，HがGの部分群であるものとする．Hが

適当なGの Borel 部分群Bを含めば，$\forall g\in G$, $\exists a\in G$, $g\in a^{-1}Ha$，すなわち，Hの共役全体の和集合がGになる．

証明 Bについていえれば，Hについてもいえるから，$H=B$と仮定してよい．定理 3·8·1 の(ロ)の条件の成立をいえばよい ((イ) は定理 3·7·1(ロ))．Bの極大トーラス部分群Tをとる．Tの元aを，Tがaを含む最小の代数群であるようにとる (系 3·2·3 の直前の問 1)．Bの共役B'がaを含む $\Rightarrow T\subseteq B'$．ゆえに，補題 3·8·4 により，そのような$B'$の数は有限個．ゆえに定理 3·8·2, 3·7·11 により，定理 3·8·1 の (ロ) の条件の成立がいえる． ∎

系 3·8·6 Gが連結線型代数群，$g\in G$ とする．Gが射影代数的集合Vの上に有理作用をもてば，$\exists p\in V$, $gp=p$.

証明 gを含むGの Borel 部分群Bがある．VにはB-不変な点がある (定理 3·5·1)．その一つをpとすればよい． ∎

問 Gが連結線型代数群，Gの元sが半単純行列であれば，sを含む極大トーラス部分群がある．

系 3·8·7 Gが連結線型代数群，Hが連結可解部分代数群，$a\in G$ とする．aを含む最小の代数群Kをとる．HがKの正規化群に含まれるならば，aとHとを含む，Gの Borel 部分群が存在する．

証明 BがGの Borel 部分群であるとする．G/Bは射影多様体である (定理 3·7·1)．前系により，$W=\{xB\in G/B \mid axB=xB\}$ は空ではない．WはG/Bの閉集合 (2·3 節終り頃の問の (ロ))．ゆえにWは射影代数的集合である．また，$W=\{xB\in G/B \mid a'xB=xB\,(\forall a'\in K)\}$ (定理 2·3·5 により，各 $xB\in W$ について，$\{g\in G \mid gxB=xB\}$ はKを含むから)．$h\in H$, $k\in K$, $xB\in W$ のとき，$h^{-1}kh\in K$ ゆえ，$\exists k'\in K$, $kh=hk'$．$khxB=hk'xB=hxB$．ゆえにWはH-認容である．定理 3·5·1 により，WはH-不変な点 x_0B をもつ．このことは，K, Hが共に $B'=\{g\in G \mid gx_0B=x_0B\}$ に含まれることを示す．$B'=x_0Bx_0^{-1}$ ゆえ，系が証明された． ∎

次は補題 3·7·9 の精密化である．

定理 3·8·8 Gが連結線型代数群であるとき，Gの中心$Z_G(G)$はGの Borel 部分群の中心$Z_B(B)$と一致し，また，$\cap_{g\in G}\, g^{-1}Bg$ に含まれる．

証明 補題 3·7·9 により，$Z_G(G)=Z_G(B)\supseteq Z_B(B)$．逆に，$a\in Z_G(G)$

をとれば，$\exists x \in G$, $a \in x^{-1}Bx$. $\therefore$ $a = xax^{-1} \in B$. $\therefore$ $Z_G(G) \subseteq B$. $\therefore$ $Z_G(G) = Z_B(B)$. また，$Z_G(G) \subseteq \bigcap_{g \in G} g^{-1}Bg$ も，上のことから明白. ▌

系 3·8·9 連結線型代数群 G のすべての元が半単純行列であれば，G はトーラス群である.

証明 Gの Borel 部分群Bは可換ゆえ，$B = Z_G(G)$.

$$\therefore \quad G = \bigcup_{g \in G} g^{-1}Bg = B. \quad ▌$$

つぎに，Borel 部分群についての，次の結果を補なう.

定理 3·8·10 φが線型代数群 G から線型代数群 G' の上への準同型であるとする. BがGの Borel 部分群であれば，φB は $G' = \varphi G$ の Borel 部分群であり，逆に B' が G' の Borel 部分群であれば，Gの適当な Borel 部分群 B_1 により，$B' = \varphi B_1$.

証明 φB が連結可解であることは明白. G/B から $G'/\varphi B$ の上への写像φ': $xB \to \varphi(xB)$ は正則写像であり，G/B が射影代数的集合（定理 3·7·1）ゆえ，$G'/\varphi B$ も射影代数的集合である(定理 2·1·4). ゆえに φB は G' の Borel 部分群を含む. ゆえに φB は Borel 部分群である. $\therefore$ $\exists c' \in G'$, $B' = c'(\varphi B)c'^{-1}$. $c \in \varphi^{-1}(c')$ とすれば，$B' = \varphi(cBc^{-1})$. ▌

系 3·8·11 G, φ, G' は上の通りとするとき，T がGの極大トーラス部分群であれば，φT は $G' = \varphi G$ の極トーラス部分群であり，逆にG' の極大トーラス部分群はGの極大トーラス部分群の φ による像である.

証明 φT がトーラス群であることは，系 3·3·12（または系 3·8·9）による. Tを含むGの Borel 部分群をBとする. T は B の極大トーラス部分群である. φB が G' の Borel 部分群であるから，φT が φB の極大トーラス部分群であることをいえば，φT が G' の極大トーラス部分群であることを知る.（その他のことは，定理 3·8·10 の証明と同様.）ゆえに $G = B$ と仮定してよい. B の ユニポテント部分を B_u とすると，$B = TB_u$. $\therefore$ $G' = \varphi B = (\varphi T)(\varphi B_u)$. φB_u は φB のユニポテント部分であるから，φT が G' の極大トーラス部分群であることを知る. ▌

3·9 Cartan 部分群

はじめにトーラス群の中心化群を考察する.

定理 3・9・1 上半三角行列群 $T(n)$ ($\subseteq GL(n,\Omega)$) の部分群 H が半単純行列ばかりから成れば，(イ) H は可換であり，(ロ) H の正規化群 $N_{T(n)}(H)$ は中心化群 $Z_{T(n)}(H)$ と一致する．

証明 $T(n)$ のユニポテント部分 U が正規部分群であり，$T(n)/U$ は可換である．$T(n)$ から $T(n)/U$ への自然準同型 φ をとると，(φ の核)$\cap H=\{e\}$．ゆえに H は可換である．$g\in N_{T(n)}(H)$，$h\in H \Rightarrow h'=g^{-1}hg\in H$．他方，$g^{-1}hgh^{-1}\in U$ ゆえ，$\exists u\in U$，$h'=hu$．h と h' とは可換であるから，$u=h^{-1}h'$ と h とは可換ゆえに，h, u は h' の半単純因子およびユニポテント因子である．ゆえに $u=e$，$g\in Z_G(H)$． ▌

問 $GL(n,\Omega)$ の部分群 G, H について，$H\subseteq G$，$\exists a\in GL(n,\Omega)$，$a^{-1}Ga\subseteq T(n)$ とする．H が半単純行列ばかりから成れば，H は可換であり，$N_G(H)=Z_G(H)$．

補題 3・9・2 G が連結可解線型代数群，φ が G から他の線型代数群 G' の中への準同型とする．G の極大トーラス部分群 T の中心化群 $C=Z_G(T)$ をとれば，φT の φG における中心化群 $Z_{\varphi G}(\varphi T)$ は φC と一致する．

証明 $\varphi C\subseteq Z_{\varphi G}(\varphi T)$ は明白．$\varphi g\in Z_{\varphi G}(\varphi T)$ ($g\in G$) と仮定する．$\varphi^{-1}(\varphi T)$ の e を含む既約成分を H とし，そのユニポテント部分を H_u とし，また φ の核を K とすると，$H=TH_u$，$H_u\subseteq K$．$\varphi(g^{-1}Tg)=(\varphi g)^{-1}(\varphi T)(\varphi g)=\varphi T$ ゆえ，$g^{-1}Tg\subseteq H$．ゆえに T，$g^{-1}Tg$ は共に H の極大トーラス部分群である．定理 3・6・6 により，$\exists u\in H_u$，$uTu^{-1}=g^{-1}Tg$．すると gu は T の正規化群 $N_G(T)$ の元である．上の問により，$N_G(T)=Z_G(T)=C$．ゆえに $gu\in C$，$\varphi g=\varphi(gu)\in\varphi C$． ▌

定理 3・9・3 連結線型代数群 G において，トーラス部分群 S の中心化群 $Z_G(S)$ は連結である．したがって，$Z_G(S)$ は S の正規化群 $N_G(S)$ の既約成分である．

証明 後半は定理 3・2・9 により，前半から出る．前半の証明をする．(i) G が可解のときをまず証明しよう．(イ) S が極大トーラス部分群である場合について，$\dim G$ についての帰納法で証明する．G が可換ならば，$Z_G(S)=G$ ゆえ正しい．G が可換でないとしよう．G のユニポテント部分 G_u の中心の e を含む既約成分 N をとる．$\dim G_u\geq 1$ ゆえ，$N\neq\{e\}$ (G_u がべき零であることに注意)．G から G/N への自然準同型を φ とする．φS は φG の極大トー

ラス部分群である(系 3·8·1). 帰納法の仮定により, $Z_{\varphi G}(\varphi S)$ は連結. 前補題により $\varphi(Z_G(S))=Z_{\varphi G}(\varphi S)$. ゆえに, $N\cap Z_G(S)$ が連結であることがわかれば, (φ を $Z_G(S)$ に制限したときの核$=N\cap Z_G(S)$ ゆえ) $Z_G(S)$ の連結性を知る. $g\in S$ を, g を含む最小の代数群が S であるようにとる (定理 3·2·2 の後の問1). このNと g とについて, 系 3·6·3 を適用すれば, F_g は $N\cap Z_G(g)=N\cap Z_G(S)$ と一致し, 系 3·6·3 により, これは連結である. (ロ) Sが極大トーラス群でないとき: S を含む極大トーラス群 Tをとれば $G=TG_u$ (G_u は G のユニポテント部分). $Z_G(S)=T\cdot Z_G(S)=T\cdot Z_{SG_u}(S)$. SG_u においては, S は極大トーラス部分群ゆえ, $Z_G(S)$ は連結. 以上, G が可解のときの証明が完了した. (ii) 一般のときを考える. $Z_G(S)$ の任意の元gをとる. 系 3·8·7 により, S と g とを含むGの Borel 部分群 Bがある. $Z_G(S)\cap B=Z_B(G)$ は (i) により連結. ゆえに, $Z_G(S)$ は連結な部分代数群いくつかによって生成され, したがって連結である (定理 1·3·6). ▮

補題 3·9·4 線型代数群 G がべき零であれば, その極大トーラス部分群T はGの中心 $Z_G(G)$ に含まれる.

証明 G の eを含む既約成分 G_0 をとり, G_0 のユニポテント部分を G_{0u} とすれば, $G_0=T\times G_{0u}$ (定理 3·6·1). (イ) $G_{0u}=\{e\}$のとき, $\dim T$ についての帰納法で証明する. 交換子群 $T_1=[G,T]$, $T_2=[G,T_1]$, $\cdots$, $T_r=[G,T_{r-1}]$, $\cdots$ は連結 (系 1·4·3). べき零ゆえ, $\exists\alpha$, $T_\alpha\neq\{e\}$, $T_{\alpha+1}=\{e\}$. ($T_1=\{e\}$ ならよいから, $T_1\neq\{e\}$ と仮定しておく.) G/T_α に帰納法の仮定を利用すると, $T_1\subseteq T_\alpha$. ゆえに $\alpha=1$, $T_2=\{e\}$. $g\in G$ を任意に固定し, 各 $t\in T$ について, $t^{-1}g^{-1}tg=n_t$ とおく. $n_t\in T_1$. $t'\in T$ のとき, $g^{-1}tt'g=tn_tt'n_{t'}=tt'n_tn_{t'}$ ゆえ, $n_{tt'}=n_tn_{t'}$. ゆえに, 写像 $\varphi: t\to n_t$ は準同型である. 他方, $g^{-1}tg=tn_t$ ゆえ, $g^{-2}tg^2=tn_t^2, \cdots, g^{-\alpha}tg^\alpha=tn_t^\alpha$. 特に, αとして, GにおけるTの指数とすれば, $n_t^\alpha=e$. $\therefore$ $\varphi t^\alpha=e$. トーラス群は可除であるから, $\varphi t=e$. これは $T_1=\{e\}$ を示す. (ロ) $G_{0u}\neq\{e\}$ のとき: G/G_{0u} に (イ) の結果を利用すれば, $g\in G$, $t\in T\Rightarrow t^{-1}g^{-1}tg\in G_{0u}$. $\therefore$ $g^{-1}tg=tu$ ($\exists u\in G_{0u}$). $tu=ut$ ゆえ, uは $g^{-1}tg$ のユニポテント因子である. tが半単純ゆえ, $g^{-1}tg$ は半単純. $\therefore$ $u=e$, $tg=gt$. ▮

一般に, 群 G において, 次の条件をみたす部分群 Cを **Cartan 部分群**とい

う：（i） Cはべき零部分群のうち極大であり，（ii） Cの部分群Hの指数が有限であれば，Hの正規化群 $N_G(H)$ の中でもHの指数は有限である．

定理 3·9·5 連結線型代数群Gにおいては，部分群Cが Cartan 部分群$\Longleftrightarrow$適当な極大トーラス部分群Tにより，$C=Z_G(T)$.

証明 $\Leftarrow$の証：$Z_G(T)$ が連結代数群であることは定理 3·9·3. Tがその極大トーラス部分群で，Tは中心に含まれる．ゆえに $Z_G(T)$ はべき零である（系 3·7·8). $Z_G(T)$ を含むべき零部分群Hがあれば，前補題により，$T\subseteq Z_H(H)$. $\therefore$ $H\subseteq Z_G(T)$. $\therefore$ $H=Z_G(T)$. ゆえに $Z_G(T)$ は極大べき零部分群．Kが $Z_G(T)$ の部分群で，指数が有限であるとする．Kは $Z_G(T)$ の指数有限の正規部分群Nを含む．N の指数を n とすると，$x\in Z_G(T)\Rightarrow x^n\in K$. Tが可除であるから，$T\subseteq K$. $Z_G(T)$ の半単純行列全体がTゆえ，Kの正規化群 $N_G(K)$ の元 g により，$g^{-1}Tg=T$. $\therefore$ $N_G(K)\subseteq N_G(T)$. $N_G(T)$ の中で $N_G(T)$ は指数有限（定理 3·7·10). ゆえに $N_G(K)$ における K の指数も有限となり，$Z_G(T)$ は Cartan 部分群である．

$\Rightarrow$の証：Cが Cartan 部分群であるとするCの閉包もべき零であるから，極大べき零性により，Cは代数群である．Cのeを含む既約成分をC_0とする．$C_0=S\times C_{0u}$（SはC_0の半単純行列全体，C_{0u}はC_0のユニポテント部分）（定理 3·6·1). C_0を含むGの Borel 部分群Bをとる．$B=TB_u$（Tは極大トーラス部分群，B_uはBのユニポテント部分). $C_0\subseteq B$ ゆえ，$S\subseteq T$, $C_{0u}\subseteq B_u$. $S=T$ であれば，補題 3·9·4 により $C\subseteq Z_G(T)$ となり，$C=Z_G(T)$. $S\neq T$ と仮定して矛盾を導こう．S の B における中心化群 $Z_B(S)$ を考える．定理 3·9·3 により $Z_B(S)$ は連結であり．$Z_B(S)=TR$, $R=B_u\cap Z_B(S)$. ゆえにRも連結．$R\neq C_{0u}$ とすると，Rのべき零性により，$\dim N_R(C_{0u})>\dim C_{0u}$. $S\cdot N_R(C_{0u})\subseteq N_G(C_0)$ ゆえ，C_0の $N_G(C_0)$ における指数は有限でなく，Cの性質に反する．$\therefore$ $R=C_{0u}$. すると，明らかに，$N_G(C_0)\supseteq TR$ となり，C_0の $N_G(G_0)$ における指数は有限でない．したがって，$S=T$ でなくてはならず，$C=Z_G(T)$. ▮

系 3·9·6 連結線型代数群Gにおいては，Cartan 部分群は互に共役である．

証明 極大トーラス部分群が互に共役なことから出る． ▮

系 3·9·7 φが連結線型代数群Gから，線型代数群G'の中への準同型である

とき，(イ) CがGの Cartan 部分群であれば，φC は φG の Cartan 部分群であり，(ロ) C' が φG の Cartan 部分群であれば，G の適当な Cartan 部分群Cにより，$C'=\varphi C$.

証明 (イ) は補題 3·9·2, (ロ) は (イ) と系 3·9·6 とによる. ▮

3·10 半 単 純 群

アフィン代数群Gについて，連結可解な正規部分群のうち最大なものを，Gの**根基**という. $\{e\}$ が根基であるとき，Gは**半単純**代数群であるという.

定理 3·10·1 任意のアフィン代数群 G について，その根基 R は存在し，G/R は半単純である.

証明 N_1, N_2 が連結可解な正規部分群であれば，N_1N_2 も連結可解な正規部分群である. ゆえに，R が存在する. $\bar{H}$ が G/R の根基とする. Gの正規部分代数群Hで，$H\supseteq R$, $H/R=\bar{H}$ なるものがある. $\bar{H}, R$ が連結ゆえ，Hも連結. H/R, R が共に可解ゆえ， H も可解. ゆえに $H\subseteq R$. ∴ $H=R$, $\bar{H}=\{e\}$. ▮

定理 3·10·2 G が半単純代数群であるとき，部分代数群 N で，正規部分群であるものは，半単純である.

証明 RがNの根基としよう. $g\in G$ について，$g^{-1}Rg$ は連結可解なNの正規部分群である ($g^{-1}Ng=N$ ゆえ). ゆえに $g^{-1}Rg=R$ ($\forall g\in G$). ゆえにRは連結可解なGの正規部分群. ∴ $R=\{e\}$. ▮

ここでは証明しないが，次の定理も成立する.[*)]

定理 3·10·3 G が連結半単純代数群，N が連結な正規代数部分群であれば，連結正規代数部分群 M で，(イ) $G=NM$, (ロ) $M\cap N=$(有限群), (ハ) $a\in N$, $b\in M \Rightarrow ab=ba$ の成り立つものがある.

これら M, N は前定理により，半単純代数群であることに注意せよ.

---

*) たとえば，まえがきで引用した Chevalley セミナー [2] 参照.

第4章 Abel 多様体

この章では，Abel 多様体についての極めて初歩的な事項と，一般代数群についての二つの構造定理とを述べるのを主目的とする．Abel 多様体は代数幾何学への応用という面から大変大切なものではあるが，本書では深入りしない．

4·1 単純点，有理対応

代数的集合Vの点pについて，pの局所環 R_p が正則局所環であるとき（すなわち，R_p の極大イデアル $\mathfrak{m}_p$ の高さをhとするとき，$\mathfrak{m}_p$ が h 個の元で生成されるとき），pはVの**単純点**であるという．次のことが知られている．

定理 4·1·1 Vの単純点全体は，Vの空でない開集合をなす．

本書では，これよりもっと弱い次の結果を利用する．

定理 4·1·1′ Vが既約であれば，Vは少くとも一つの単純点をもつ．

他方，次のことは正則局所環の性質を利用して証明される：

定理 4·1·2 Vが既約，pがVの単純点であるとき，U，W がVの部分代数多様体でpを通るとき，$U\cap W$ の既約成分でpを含むものTについて，

$$\dim T \geq \dim U + \dim W - \dim V.$$

以上のことがらについては，他書を参照されたい．また，単純性の判定法として知られるヤコビアン行列による判定法についても，他書にゆずる．

1·1，2·2 節において正則写像を定義した．その一般化である有理対応について，その定義と主な結果とを簡単に述べよう．

V，W が代数多様体，φがVからWの中への正則写像であるとき，φV の閉包 V^* は既約であり，V^* の上の正則有理函数はVの上の正則有理函数と考えられた．従って，V^* の有理函数体 $\Omega(V^*)$ はVの有理函数体 $\Omega(V)$ の部分体と考えられる．$V^*=W$，$\Omega(V^*)=\Omega(V)$ であるとき，φは**双有理**であるという．

三つの代数多様体 T，V，W が次のように与えられたとする．(i) Tは

$V\times W$ の閉集合，(ii) $(a, b)\in T$ $(a\in V, b\in W)$ のとき，$\varphi(a, b)=a$, $\psi(a, b)=b$ なる写像 φ, ψ（すなわち，T から V への射影が φ, T から W への射影が ψ）を考えるとき，φ が双有理正則写像．このとき，$(a, b)\in T\Longleftrightarrow a\,(\in V)$ が $b\,(\in W)$ に対応，によって，V の点と W の点との対応を定める．このようにして得られる V の点に W の点を対応させる法則を，**有理対応**という（V の一点に，W の多くの点が対応することがあり得る）．T をこの有理対応の**グラフ**という．ψ も双有理であるとき，上の有理対応は**双有理対応**であるといわれる．

τ が V から W への有理対応であるとする．$p\in V$ について，p を含む V の開集合 U が，τ を U に制限したもの（T の代りに，$T\cap(U\times W)$ を考えて得た有理対応を意味する）が正則であるように選べるとき，τ は p で**正則**であるという．ここで注意すべきことは，V の空でない開集合 U から W の中への正則写像 τ' をとれば，τ' は唯一通りに，V から W への有理対応を定める．すなわち，T として $V\times W$ における $\{(a, \tau' a) \mid a\in V\}$ の閉包を考えるのである．

定理 4·1·3 τ が代数多様体 V から代数多様体 W の中への有理対応であるとき，$D=\{a\in V \mid \tau$ が a で正則$\}$ は V の空でない開集合をなす．

D を τ の**正則域**とよぶことにしよう．

定理 4·1·4 τ, V, W が上の通りであるとき，W の開集合 W' について，τ を V から W' の中への有理対応に制限したもの*) が p で正則ならば，τ が p で正則である．

定理 4·1·5 τ, V, W, D は上の通りとする．V の一点 p の局所環が正規環であれば（したがって，特に，p が V の単純点であれば），V の部分代数多様体 F で，$p\in F$ かつ $\dim F=\dim V-1$ なるものについて，（イ） $F\cap D$ は空でないか，（ロ） F の空でない適当な開集合 F_0 のどの点にも τ で対応する W の点が存在しないか，いずれかが成立する．特に，W が射影多様体であれば，（イ）が成り立つ．

次に，有理函数についての注意をつけ加えよう．V は上の通りとし，f が V の上の有理函数であれば，f は V から $A^1(\Omega)$ の中への有理対応を定める．ゆえに，定理 4·1·3 の特別な場合として，

*) τ を与える $V\times W$ の閉集合が T のとき，$T\cap(V\times W')$ による対応を意味する．

定理 4·1·6 Vの上の有理函数fの正則域D_fは空でない開集合である.

$V-D_f$ の既約成分のうち，次元が $\dim V-1$ であるものの和集合をfの**極**という.

定理 4·1·7 Vの点pの局所環が正規環であるとき，有理函数fがpで正則でないならば，fの極がpを含む.

なお，本章においては，今まで述べたことの他にも，代数幾何学において常識的なことは利用する.

4・2 Abel 多 様 体

まず，次の定理から始めよう.

定理 4·2·1 Gが代数群であれば，Gのすべての点は単純点である.

証明 G の既約成分 G_0 をとれば，G_0 は単純点 p をもつ（定理 4·1·1′). G_0 と，G の他の成分とは共通点をもたないから，p の G 上の局所環は，p の G_0 上の局所環と一致する. ゆえにp はGの単純点である. $g\in G$ ならば，GからG の上の双正則写像でp をg にうすつものがある（$p^{-1}g$ を右からかけることを考えればよい; 定理 1·2·2). ゆえにpの局所環とg の局所環とは互いに同型である. ゆえにg も単純点である. ∎

2·2 節 で述べたように，代数群 G の代数的集合としての構造が射影多様体（既約な射影代数的集合）であるとき，Gは Abel 多様体であるという. 次の定理は定理 2·2·2 として，証明なしで述べた.

定理 4·2·2 Abel 多様体Aは可換群である.

証明 $A\times A$ から $A\times A$ の中への写像φを，$\varphi(x,y)=(x,\ x^{-1}y^{-1}xy)$ により定める. これは正則写像である. $W=\varphi(A\times A)\cap e\times A$ とおく. $y^{-1}ey=e$ $(\forall y\in A)$ ゆえ，$W=\{(e,\ e)\}$. さて，$A\times A$ は射影多様体ゆえ，$\varphi(A\times A)$も射影多様体（定理 2·1·4, 1·1·6). $e\times A$ も同様（Aと双正則ゆえ）射影多様体. $A\times A$ は代数群ゆえ，$(e,\ e)$ は単純点(前定理). ゆえに，定理 4·1·2 を $A\times A$ 上の部分代数多様体 $\varphi(A\times A)$, $e\times A$ に適用し，$0=\dim W\geq\dim\varphi(A\times A)+\dim e\times A-\dim A\times A=\dim\varphi(A\times A)+\dim A-2\dim A$

$$\therefore\quad \dim\varphi(A\times A)\leq\dim A.$$

逆の不等式は明白ゆえ，$\dim\varphi(A\times A)=\dim A$. $\varphi(A\times A)\supseteq A\times e$ は明白ゆ

え，$\varphi(A\times A)=A\times e$. ∴ $x^{-1}y^{-1}xy=e$ $(\forall x,\ y\in A)$. ∎

Abel 多様体においては，算法が上に述べたように可換であることと，具体的例との関連とにより，算法は＋で示されることが多い．その場合，単位元は 0 で，元 a の逆元は $-a$ で示される．

射影代数多様体の上の一次系 (linear system) についての基礎知識をもっている人のために，次の演習問題をつけておこう．

問 1 $P^2(\Omega)$ の上の三次曲線 C で，その上の点がすべて単純点であるものを考える (例えば，Ω の標数$\fallingdotseq 3$ のときの $x^3+y^3+z^3$ の零点集合 C_0)．p_0 が C の変曲点であるとする．(C_0 上では，$(0,\ 1,\ -1)$ は一つの変曲点．C に変曲点が必ず 9 個あることが知られている．) (イ) $a\in C$ について，a と p_0 とを結ぶ直線 l が C と交わる第三の点を $-a$ と定める (ただし，$-p_0=p_0$)．(ロ) $a, b\in C$ のとき，a と b とを通る直線 m (ただし，$a=b$ のときは a における C の接線を m とする) が C と交わる第三の点が $-(a+b)$ であるように，a と b との和 $a+b$ を定める．このようにすると，C は p_0 を 0 にもつ Abel 多様体になる．

定理 4·2·3 τ が代数多様体 V から Abel 多様体 A の中への有理写像であれば，τ は V の単純点においては，必ず正則である．

証明 $V\times V$ から A の中への有理対応 φ を，$\varphi(a,\ b)=\tau a-\tau b$ [A の算法は加法で示す] とおく．p が V の単純点であるとする．V の空でない開集合 U を，τ が U 上には正則であるようにとる．次のことをまず示そう．

(＊) φ が (a, a) で正則 $(a\in V)$ $\Longleftrightarrow$ τ が a で正則

$\Leftarrow$ は明白．φ が $(a,\ a)$ で正則ならば，φ の正則域 T は $(a,\ a)$ を含む．T は $V\times V$ の空でない開集合であるから，$\exists b\in U$, $(a, b)\in T$ (理由：$a\times V\cap T$ は空でなく，$a\times V$ の開集合であるから)．すると，$\tau a=\varphi(a,\ b)+\tau b$ であるから，τ は a で正則．よって (＊) が証明された．

さて，τ が p で正則でないとしよう．すると，φ は (p, p) で正則ではない．明らかに，A の単位元 0 は (p, p) に対応する．A の 0 を含む開集合 A_0 で，アフィン多様体になっているものをとる．A_0 の上の座標函数 $x_0, \cdots, x_n$ をとり，それらが (φ によって) 定める $V\times V$ の上の有理函数を $y_0, \cdots, y_n$ とする．φ が $(p,\ p)$ で正則でないのだから，$\exists i, y_i$ が $(p,\ p)$ で正則でない (定理 4·1·4)．y_i の極の既約成分 X で，$(p,\ p)$ を含むものがある(定理 4·1·7)．$\Delta=\{(a,\ a)\,|\,a\in V\}$ とおく．$\Delta_U=\Delta\cap U\times U$ においては φ は正則で，$\varphi(a,\ a)$

$=0$ ($\forall a\in U$) ゆえ，Xは$\varDelta$を含まない．$\dim X=\dim V\times V-1$ ゆえ，$X\cap\varDelta$ の (p, p) を通る成分 X_0 の次元は $\dim V-1$ になる ($\dim\varDelta=\dim V$ に注意；定理 4・1・2)．(*) により，$X'=\{a\in V|(a, a)\in X_0\}$ の各点において，τをVと A_0 との対応に制限したもの τ_0 が正則でない．$\dim X'=\dim V-1$ であり，X' の各点に $0\in A_0$ が対応するから，定理 4・1・5 に反する．ゆえに，τはpで正則． ▮

問 2 上の証明にならって，次のことを示せ：τが代数多様体Vから代数群Gの中への有理対応であり，pがVの単純点であるとする．pにおいてτが正則でないならば，pを含む既約部分多様体 Xで $\dim X=\dim V-1$，かつ，Xの空でない開集合 X_0 が存在して，X_0 のどの点もτによってはGの点に対応しないものがある．

定理 4・2・4 V, W が代数多様体，Aが Abel 多様体，φ が $V\times W$ から A の中への有理対応であるとする．V の一つの単純点 p に対して，φ が $p\times W$ からAの一点 a への有理対応を定める (すなわち，W の適当な開集合 W_0 に対して，φ は $p\times W_0$ の各点で正則，かつ $\varphi(p\times W_0)=a$) とき，V からAの中への有理対応 φ_0 により，$\varphi(x, y)=\varphi_0(x)$ ($\forall x\in V, \forall y\in W$)．

証明 Wの代りに，Wの空でない開集合におきかえてもよいから，Wの各点は単純点であるものとしてよい．f のグラフ T ($\subseteq V\times W\times A$) をかきかえて，$T'=\{(x, y, z)\in V\times A\times W|(x, z, y)\in T\}$ とおき，$V\times A$ へ射影して $T_0=\{(x, y)\in V\times A|(x, y, z)\in T'$ ($\exists z\in W$)$\}$ をとる．$I=T_0\cap(p\times A)$ とおく．$(p, a)\in I$ は明白．逆に $(p, y)\in I$ とすると，$\exists z\in W$, $(p, z, y)\in T$．W の各点は単純点と仮定したから，f は (p, z) で正則 (前定理)，$y=a$．$\therefore$ $I=\{(p, a)\}$．$\therefore$ $0=\dim I\geq\dim T_0+\dim(p\times A)-\dim(V\times A)=\dim T_0+\dim A-(\dim V+\dim A)$．$\therefore$ $\dim T_0\leq\dim V$．T は $V\times W$ から A の中への有理対応のグラフであるから，$\dim T_0\geq\dim V$．$\therefore$ $\dim T_0=\dim V$．また $\dim T'=\dim V\times W$ ゆえ，$\dim T'=\dim T+\dim W$．$T'\subseteq T_0\times W$ ゆえ，$T'=T_0\times W$．したがって，$\varphi(x, z)$ ($x\in V$, $z\in W$) は z には関せず，x だけで定まる． ▮

定理 4・2・5 V, W が代数多様体，Aが Abel 多様体，φ が $V\times W$ からAの中への有理対応であるとき，VからAの中への有理対応 ψ_1，WからAの中への有理対応 ψ_2 で，$\varphi(x, y)=\psi_1x+\psi_2y$ ($\forall x\in V, \forall y\in W$) なるものがあ

る．他の同様な ψ_1, ψ_2 —— それらを ψ_1', ψ_2' とすれば，Aの一点 a により，$\psi_1'x=\psi_1x+a$, $\psi_2'y=\psi_2y-a$.

証明 V, W の各点は全部単純点であると仮定してよいのは，前定理の証明と同様である．このとき，φ は $V\times W$ から A の中への正則写像になる（定理 4·2·3）．$p\in V$ を固定し，$\psi_2y=\varphi(p, y)$ により ψ_2 を定める．$\varphi'(x, y)=\varphi(x, y)-\varphi(p, y)$ なる φ' は，$V\times W$ から A の中への正則写像である．$\varphi'(p, y)=0\ (\forall y\in W)$ ゆえ，前定理により，$\varphi'(x, y)=\psi_1x$ なるVからAの中への正則写像 ψ_1が定まり，$\varphi(x,y)=\varphi'(x, y)+\varphi(p, y)=\psi_1x+\psi_2y$. ψ_1', ψ_2' を考えよう．$\psi_1x+\psi_2y=\psi_1'x+\psi_2'y$. $\therefore$ $\psi_1x-\psi_1'x=\psi_2y-\psi_2'y$. ゆえに，$\psi_1-\psi_1'$ は x, y に関せず定まる． ▮

定理 4·2·6 G が連結代数群，Aが Abel 多様体であるとき，GからAの中への正則写像φは，必ず，適当な準同型ψと，Aの一点 a とにより，

$$\varphi x=\psi x+a.$$

証明 $G\times G$ からAの中への写像fを，$f(x, y)=\varphi(xy)-\varphi e$ によって定めると，fは正則写像になり，$f(e, e)=0$. 前定理により，$f(x, y)=\psi_1x+\psi_2y$, $\psi_1(x)=f(x, y)-f(e, y)$, $\psi_2(y)=f(e, y)$. すると，$\varphi(ab)-\varphi e=f(e, ab)=\psi_2(ab)$. また $\varphi(ab)-\varphi e=f(a, b)=\psi_1a+\psi_2b$. $\therefore$ $\psi_2(ab)=\psi_1a+\psi_2b$. $b=e$ とすると，$\varphi_2e=f(e, e)=0$ ゆえ，$\psi_1a=\psi_2a$. $\therefore$ $\psi_1=\psi_2$.
$\therefore$ $\psi_2(ab)=f(e, ab)=\varphi(ab)-\varphi e=f(a,b)=\psi_1a+\psi_2b=\psi_2a+\psi_2b$.
ゆえに ψ_2 は準同型であり，$\varphi x-\varphi e=f(x,e)=\psi_2x$. ▮

定理 4·2·7 代数多様体Vの上の有理函数体が $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$ （$X_1, \cdots, X_n$ は Ω上代数的独立）であるとき，Vから Abel 多様体Aの中への有理対応φについて，φV は必ず一点だけになる．

証明 Vは有理函数体を変えない限り，他のものにとりかえてもよい．そこで，射影直線 L により，$V=V_n=L\times\cdots\times L$（$n$重積）であるとしてよい．$n$ についての帰納法を利用する．$n=1$ のとき：L から一点 p をとり去ったもの L_0 は一次元ファイン空間と考えられるから，Ωの加法群と考えられる．すると，$\exists a\in A$, $\psi x=\varphi x-a$ により，$\psi(x+y)=\psi x+\psi y$ （$\forall x, y\in\Omega=L_0$）（前定理）．また $L_0-\{0\}$ は乗法により代数群をなすから，$\exists b\in A$, $\psi^*x=\varphi x-b$ により，$\psi^*(xy)=\psi^*x+\psi^*y$ （前定理）．$\therefore$ $\psi(xy)=\varphi(xy)-a=\psi^*(xy)-a+b$

$=\psi^*x+\psi^*y-a+b=\varphi x+\varphi y-a-b=\psi x+\psi y+a-b=\psi(x+y)+a-b.$

z, w を Ω の 0 でない任意の二元とするとき，$xy=z$, $x+y=w$ なる $x, y \in \Omega$ ($xy \neq 0$) は存在する．すると，上の等式は，$\psi z=\psi w+(a-b)$ が z, w に関せず成立することを示し，$\varphi(\Omega-\{0\})$ は一点，ゆえに φL は一点．$n>1$ のとき：$V_n=L\times V_{n-1}$. $\varphi(L\times p)$ ($p\in V_{n-1}$) は一点ゆえ，φ は V_{n-1} から A の中への正則写像を定める．ゆえに帰納法の仮定により，φV_n は一点． ▮

系 4・2・8 連結アフィン代数群 G から Abel 多様体 A の中への有理対応 φ をとれば，φG は一点から成る．

証明 G の函数体が上の定理のようになっていることが知られているが，そのことは利用せずに証明しよう．G の Borel 部分群 B の函数体は上の定理のようになっていることは明白であるから，それを利用する．定理 4・2・6 により，φ が準同型と仮定してよい．上の定理により，B は φ の核に含まれる．B の共役の和集合は G になる（定理 3・8・5）．ゆえに φ の核は G. ▮

4・3 代数群の構造定理

代数群の構造について，次の二定理は特に基本的である．

定理 4・3・1 G が代数群であるとき，G の正規部分代数群 N で，G/N がアフィン代数群であるもの全体のうちに最小のもの D がある．D は連結である．G の e を含む既約成分 G_0 をとれば，D は G_0 の中心 $Z_{G_0}(G_0)$ に含まれる．

定理 4・3・2 G が連結代数群であるとき，G に含まれる連結アフィン代数群全体のうちに最大なもの L がある．L は正規部分群であり，G/L は Abel 多様体である．

この節では，まず定理 4・3・1 の証明をする．定理 4・3・2 の証明をするのには，代数多様体の定義体，生成点などの概念が必要になるので，本書ではその証明はしないが，証明の方法の概略だけをつけ加えることにする．

補題 4・3・3 N, N' が代数群 G の正規部分代数群で，G/N, G/N' が共にアフィン代数群であれば，$G/(N\cap N')$ もアフィン代数群である．

証明 $G/(N\cap N')$ の元 $g(N\cap N')$ に対し，$(G/N)\times(G/N')$ の元 (gN, gN') を対応させることにより，$G/(N\cap N')$ は $(G/N)\times(G/N')$ の部分代数群と考えることができる．$(G/N)\times(G/N')$ はアフィン代数群ゆえ，

$G/(N\cap N')$ アフィン代数群である. ▌

定理 4·3·1 の証明:前補題により，Dの存在がわかる．Dの e を含む既約成分 D_0 をとる．G/D_0 から G/D への自然準同型φによる正則写像を考えると，$\forall x\in G/D$ について，$\varphi^{-1}(x)$ は有限個の点から成り，その個数は一定（D_0 の D における指数)．ゆえに G/D_0 もアフィンを代数群である（定理 2·1·7)．あと，Dが G_0 の中心に含まれることをいえばよい．$N\subseteq G_0$ のとき，G/N がアフィン$\Longleftrightarrow G_0/N$ がアフィン は明白ゆえ，$G=G_0$ と仮定してよい．e で正則な $G=G_0$ 上の有理函数全体R（e のG上での局所環）を考え，GのR上の作用を次のように定める: $g\in G$, $f\in R$ について，gf は

$$(gf)(x)=f(g^{-1}xg) \quad (\forall x\in G)$$

によって定める．$(gf)(e)=f(e)$ ゆえ，この作用では e における値は変らない．このことから，各 $g\in G$ はRの自己同型をひきおこすことがわかる．Rの極大イデアルをMとするとき，各nについて，$F_n=R/M^n$ はΩの上の有限生成の加群であり，上で定めた作用は F_n の上の作用を定める．F_n を G の表現加群と考えての表現 ρ_n をとると，ρ_n はGの有理表現である．ρ_n の核を K_n とする. $K_1\supseteq K_2\supseteq\cdots\supseteq K_n\supseteq\cdots$ ゆえ，$\exists m$, $K_m=K_{m+1}=\cdots$. すると，$g\in K_m$ $\Longleftrightarrow$ $gf=f$ $(\forall f\in R)\Longleftrightarrow g^{-1}xg=a$ $(\forall x\in G)$. ゆえに，$K_m\subseteq Z_G(G)$.
他方，$G/K_m\cong\rho_m G$（アフィン代数群）ゆえ，$K_m\supseteq D$. ∴ $D\subseteq Z_G(G)$. ▌

次に定理 4·3·2 の証明の概略をのべよう．まず，次の基本的な補題から始める．

補題 4·3·4 Nが連結代数群Gの正規部分代数群で，G/N がアフィン代数群であり，Nが1次元のトーラス群であるか，または，一次元の連結ユニポテント群(前者はΩの0以外の元のなす乗法群，後者はΩの加法群と考えられる)であれば，Gもアフィン代数群である．

問 定理 4·3·2 を認めた上で，上の補題を次の形に一般化せよ: Nが代数群Gの正規部分代数群で，G/N, N が共にアフィン代数群であれば，Gもアフィン代数群である．

上の補題の証明には，次のことを利用する: Gから G/N への自然準同型をφとするとき，G/N からGの中への正則写像ψで，$\varphi\psi=1$（すなわち $\forall x\in G/N$, $\varphi(\psi x)=x$）なるものがある．[これは，G, N, G/N の共通定義体K上で考えて，G/N の生成点xをとると，$\varphi^{-1}(x)$ の点zで，$K(x)$-有理点であ

るものが存在する（Nの性質による）ことを利用して証明される.］ N の座標函数fに対して，$a\in G$のとき $f^*(a)=f((\psi\varphi a)a^{-1})$ によって定めたG上の有理函数をとり，これが G 上正則であることを使って， $\sum_{a\in G} af^*\Omega$ が Ω 上生成であることを示し（それには，体の拡大の一次非連結性に関する結果有限を使う），この表現加群によるGの表現を利用する． ▮

次に：

補題 4·3·5 Abel 多様体 A が連結代数群 G の部分代数群であるとき，（イ）： A は G の中心 $Z_G(G)$ に含まれる.（ロ） 連結部分代数群 G_1で，$G=G_1A$, $G_1\cap A=$有限群 であるものが存在する.（ハ） G が Abel 多様体 $\Longleftrightarrow$ G_1 が Abel 多様体.

この補題の証明は，次のようにする.（イ）: 定理 4·1·6 により，$G/Z_G(G)$ はアフィン代数群. ゆえにその連結部分代数群 $A/(A\cap Z_G(G))$, もアフィン多様体. 他方，A は射影多様体ゆえ，その正則写像による像 $A/(A\cap Z_G(G))$ は射影多様体，ゆえに，これは一点であり，$A\subseteq Z_G(G)$.（ロ）: GからAの中への正則写像 ϕ と自然数 n とが，$\phi(xg)=(\phi g)x^n$ ($\forall x\in A$, $\forall g\in G$) をみたすように存在する.［略証: G, A の共通定義体 K を考え，$G\times G$ の部分集合 $T=\{(g, ag)|g\in G,\ a\in A\}$ をとる. $\theta(g, ag)=a$ により，TからAの中への正則写像 θ を定める. Gの生成点 x に対応する G/A の点$x'=Ax$をとり，多様体 Axの $K(x')$上有理な Ax の0-サイクル $\sum_{i=1}^n x_i$をとり，$\phi(x)=\Pi_i\theta(x, x_i)$ によって導かれる有理対応 ϕ をとればよい.］ ϕ の代りに，$\psi=(\phi e)^{-1}\phi$ を考えれば，$\psi e=e$ となり，ψは準同型になる（定理 4·2·6). $\psi x=x^n$ ゆえ，$\psi A=A$. $\therefore$ $\psi G=A$. ψの核の e を含む既約成分を G_1 とすればよい.

（ハ）: ⇒は明白. ⇐: $G_1\times A\to G$ の自然な正則写像 η: $(g, a)\to ga$ がある. $G_1\times A$ が射影多様体ゆえ，$G=\eta(G_1\times A)$ も射影多様体. ▮

<u>定理 4·3·2 の証明</u>：$\dim G$ についての帰納法を利用する. G の中心の，e を含む既約成分を Z_0 とする. 定理 4·3·1 におけるDは Z_0 に含まれる. ゆえに，$\dim Z_0=0$ ならば G 自身アフィン代数群となり，この場合は明白. $\dim Z_0>0$ としよう.（イ） Z_0 が Abel 多様体であるとき：補題 4·3·5 により，部分代数群 G_1 で，$G_1\cap Z_0$ が有限群で，$G=G_1Z_0$ なるものがある. $G/Z_0\cong G_1/(G_1\cap Z_0)$ がアフィン代数群（$D\subseteq Z_0$ ゆえ），G_1 もアフィン代数群

(定理 2·1·7). $G/G_1 \cong Z_0/(G_1 \cap Z_0)$ は Abel 多様体. H が G の連結アフィン部分代数群であるとき，$H \subseteq G_1$ を示せば，$G_1 = L$ となる. G から G/G_1 への自然準同型 ϕ を考えると，系 4·2·8 により，ϕH は単位元だけ. ∴ $H \subseteq G_1$.
(ロ) Z_0 が連結アフィン代数群 Z_1 ($\dim Z_1 > 0$) を含むとき: $\dim Z_1 = 1$ としてよい. G/Z_1 に対する L に相当するものを L_1 とし，L_1 の G における原像を L とする. $G/L \cong (G/Z_1)/L_1$ ゆえ，これは Abel 多様体. 連結アフィン部分代数群 H をとれば，$H \subseteq L$ は上の $H \subseteq G_1$ と同様. 補題 4·3·4 により L もアフィン代数群ゆえ，この場合正しい. (ハ): あと，(イ)でないならば (ロ) が成り立つことをいえばよい. $G \neq Z_0$ ならば，帰納法の仮定により，それがいえる. そこで，$G = Z_0$ としてよい. このときの略証を述べる. G が Abel 多様体でないとすると，G を射影多様体 V の開集合とすることができる. G の G への作用がひきおこす V から V 自身への有理対応を利用して，(i) V を適当にとれば，$\exists p \in V$, $p \notin G$, $gp = p$ ($\forall g \in G$)，または，(ii) G の連結部分代数群 H で，$\dim G > \dim H > 0$ であるものがあるか，いずれかの成立がいえる. (i) の場合には，定理 4·3·1 の証明と同様の方法で，G がアフィン代数群であることを知る. (ii) の場合，H が Abel 多様体でなければ，帰納法の仮定により，H がアフィン部分代数群で次元が正のものがあり，(ロ) が成り立つ. H が Abel 多様体であれば，補題 4·3·5 により，(G_1 に着目して) 上と同じ証明で (ロ) の成立がいえる. ∎

付　録 1　不　変　元

付 1·1 基 礎 概 念

簡単のため，付録 1 では，環とは単位元をもつ可換環を意味するものとする．

一般に群 G が環 R の作用群であるとき，すなわち，（イ） G の各元 g と R の各元 x との積 gx が R の元として定まっていて，$x \to gx$ が R の自己同型になっていて，（ロ） $g_1, g_2 \in G$, $x \in R \Rightarrow (g_1g_2)x = g_1(g_2x)$, （ハ） $ex = x$（e は G の単位元)，の成り立つとき，次のような定義をする：

（1） R の部分環 I について，$gx = x$ （$\forall g \in G$, $\forall x \in I$）であるとき，上の作用は I の**上の**作用という．R の単位元 1 で生成された部分環 π をとれば，上のような一般の作用は π の上の作用である．

（2） $f \in R$ について $gf = f$ （$\forall g \in G$）のとき，f は G-**不変元**であるという．G-不変元全体は R の部分環をなす．（証明は容易．各自試みよ．）これを G の**不変環**という．

（3） $f \in R$ について，各 $g \in G$ に対し，$gf = a_g f$ なる G-不変元 a_g の存在するとき，f は G-**半不変元**であるといい，g に対して a_g （mod $0 : f$)*) を対応させる写像を f の**指標**という．

補題 付 1·1·1　半不変元の指標は群としての準同型である．

証明　$g, h \in G$, f が上の通りとすれば，$a_{gh}f = (gh)f = g(hf) = g(a_h f) = a_h a_g f = a_g a_h f$. $\therefore$ $a_{gh} \equiv a_g a_h$ (mod $0 : f$).　▌

定理 付 1·1·2　G, R は上の通りとする．N が G の正規部分群であるとき，R 内の N-不変元全体 S をとれば，G は自然に S の作用群となり，その作用は自然に G/N の作用と考えられる．

証明　$f \in S$, $g \in G$, $n \in N \Rightarrow n(gf) = ngf$. N が正規部分群であるから，$\exists n' \in N$, $ng = gn'$. $\therefore$ $n(gf) = g(n'f) = gf$. $\therefore$ $gf \in S$.　このことから前

*) $af = bf \Longleftrightarrow (a-b)f = 0 \Longleftrightarrow a - b \in 0 : f = \{x \in R \mid xf = 0\}$ であるから，$a_g f$ が定まったとき，a_g は $0 : f$ を法として定まる．

半が出る．$(gn)f=gf$ ゆえ，後半が出る． ∎

問1 群Gが環Rの作用群であるとき，Gは自然に，Rの全商環の作用群になる．

問2 G, R 上の通りで，$f\in R$ が G-不変元であるとする．$h\in R$ について：hf が G-不変元 $\Longleftrightarrow h(\mathrm{mod}\ 0:f)$ が（$R/(0:f)$ 内の）G-不変元．

Rの全商環をQとするとき，Q内の G-不変元（問1参照）とR内の G-不変元との関係は，一般には複雑であるが，次のことが成立する．

定理 付 1·1·3 Rが素元分解環でRの正則元がすべてG-不変元であるときは，$f\in Q$ が G-不変元 $\Longleftrightarrow R$内の G-半不変元 h, k で同じ指標をもつものにより，$f=k/h$ と表わし得る．

証明 $\Leftarrow$は明白，$\Rightarrow$はfを既約分数に表わしてみれば容易にわかる． ∎

系 付 1·1·4 Rが素元分解環で，Rの正則元がすべてG-不変元であり，R内の G-半不変元がすべて G-不変元であるときは，[*)] Q の元 f が G-不変元 $\Longleftrightarrow f$ がR内のG不変元の比で表わし得る．

付 1·2 半可約な作用

次に，Gの作用についての特別な条件を考えよう．

記号は前節の通りとする．Gの作用がIの上に**有限性**をもつとは，次の条件のみたされるときにいう．(イ) Gの作用はIの上の作用である．(ロ) $f\in R \Rightarrow \sum_{g\in G} gfI$ はI-加群として有限生成．

例えば，Iに成分をもつ行列のなす群について，その元がひきおこす変数の一次変換によって定義される，多項式環の自己同型を考えれば，その作用は，この条件をみたす．また，アフィン代数群Gがアフィン代数的集合Vの上の有理作用をもつとき，GのひきおこすVの座標環の上の作用もこの条件をみたす．

上の条件の下で，Gの作用が**半可約**であるとは，次の条件がみたされるときにいう．M が I 上有限生成の加群で G-認容，$f\in R$ について，$f-gf\in M$ ($\forall g\in G$) が成立すれば，f と M の生成元 $m_1,\cdots,m_s$ とについての斉次式 $F=f^d+c_1f^{d-1}+\cdots+c_d$（次数 $d>0$；c_i は $m_1,\cdots,m_s$ についての，Rに係数をもつ i 次斉次式）で，G-不変元であるものが存在する．

$d=1$ で必ず存在するとき，Gの作用は**可約**であるという．

---

*) Gが連結線型代数群で，その根基がユニポテントであれば，その有理作用によっては，半不変元は不変元である．

この定義の下で，次のことが成立する．

定理 付 1·2·1 R が部分環 I の上に有限生成，I が Noether 環，群 G の作用が I の上に有限性をもつものとし，さらに，G の作用が半可約であるとき，次のことが成立する．ただし S は R 内の G-不変元全体とする．

（イ） φ が R から環 R' の上への G-認容な準同型であるとき，f' が R' 内の G-不変元であれば，S の元 f と自然数 t とがあって，$\varphi(f)=f'^t$.

（ロ） $f_1,\cdots,f_r\in S$ のとき，$f\in S\cap\sum f_iR$ ならば，自然数 t が $f^t\in\sum f_iS$ であるように存在する．ゆえに，$S\cap\sum f_iR$ の根基は $\sum f_iS$ の根基と一致する．

（ハ） J_1, J_2 が R の G-認容なイデアルで，$J_1+J_2=R$ ならば，$\exists a\in J_1\cap S$, $\exists b\in J_2\cap S$, $a+b=1$.

（ニ） I が体で，[*] G が I の上の多項式環 $I[X_1,\cdots,X_n]$ の上に $\sum X_iI$ の一次変換によってひきおこされる半可約作用をもち，$I[X_1,\cdots,X_n]$ から R の上への G-認容な準同型 τ によって R の作用が得られているとすれば，S は I 上有限生成である．[**]

証明 （イ）: $\varphi f_1=f'$ なる $f_1\in R$ をとり，$M=\sum_{g,h\in G}(gf-hf)I$ とおくと，$M\subseteq\sum_{g\in G}gfI$ ゆえ，M は有限生成．$f-gf\in M$ ($\forall g\in G$) ゆえ，$\exists f=f_1{}^d+c_1f_1{}^{d-1}+\cdots+c_d\in S$, c_i は M の元について i 次斉次式．$\varphi f_1=f'$ が G-不変ゆえ，M は φ の核に含まれる．ゆえに $\varphi c_i=0$ ($\forall i$). $\therefore$ $\varphi f=f'^d$.

（ロ）: r についての帰納法を利用する．$r=1$ のとき: $f=f_1a$ ($a\in R$), $a \pmod{0:f_1}$ が G-不変（前節の問 2）．$M=\sum_{g,h\in G}(ga-ha)I$ とおくと，$M\subseteq 0:f_1$. 上に同様に $\exists b=a^d+c_1a^{d-1}+\cdots+c_d\in S$, c_i は M の元について i 次斉次式．$f_1{}^db=f_1{}^da^d=f^d$. $\therefore$ $f^d\in f_1S$. $r>1$ のとき: $R\to R/f_1R$ なる自然準同型を $^-$ で，$R\to R/(0:f_1)$ なる自然準同型を * で示すことにすると，$\bar{f}\in\bar{S}\cap\sum_{i=1}^{i}\bar{f}_i\bar{R}$, $\bar{S}\subseteq\bar{\bar{S}}=(\bar{R}$ 内の G-不変元全体）ゆえ，帰納法の仮定により，$\exists t$, $\bar{f}^t\in\sum_{i=1}^{r}f_i\bar{\bar{S}}$ ゆえに，$f^t=\sum_{i=1}^{r}f_ih_i$, かつ，$i\geq 2$ について，$\bar{h}_i$ は

---

[*] I が体でなくても，例えば有理整数環のときなど，適当な条件の下で，ここの証明がそのまま適用できる．

[**] 多項式環への半可約な作用から得られているという条件なしでも正しいと予想されるが，まだ証明されていない．

G-不変元，であるように $h_i \in R$ が存在する．（イ）により，自然数 u により，$\bar{h}_r{}^u = \bar{k}_r$ なる $k_r \in S$ が存在し，$f^{tu} = \sum_{i=1}^{r} f_i k_i$，$k_r \in S$ なる $k_i \in R$ が存在する．$f^{tu} - f_r k_r \in S \cap \sum_{i=1}^{r-1} f_i R$ ゆえ，自然数 v により $(f^{tu} - f_r k_r)^v \in \sum_{i=1}^{r-1} f_i S$．$\therefore$ $f^{tuv} \in \sum_{i=1}^{r-1} f_i S$.

（ハ）：$\exists x \in J_1, \exists y \in J_2$，$x + y = 1$．$M = \sum_{g, h \in G} (gx - hx) I$ とおく．$M \subseteq J_1$ は明白．$x - 1 = y \in J_2$，$g(x-1) - h(x-1) = gx - hx$ ゆえ，$M \subseteq J_2$．$\therefore M \subseteq J_1 \cap J_2$．$x \pmod M$ は G-不変ゆえ，$\exists a = x^d + c_1 x^{d-1} + \cdots + c_d \in S$，$c_i$ は M の元について i 次斉次式．すると，$c_i \in J_1 \cap J_2$ ゆえ，$a \in J_1$．$x - 1 \in J_2$，$c_i \in J_1 \cap J_2$ ゆえ $a - 1 \in J_2$．この a，$b = 1 - a$ が求めるものである．

（ニ）の証明のために，次の二つの補題を用意する．

補題 付 1·2·2 環 R が Noethor 環 I の上に有限生成であり，環 S について，$I \subseteq S \subseteq R$，かつ，$R$ が S の上に整，であるならば，S も I 上有限生成であり，R は S-加群として有限生成．

証明 $R = I[a_1, \cdots, a_n]$ とする．各 c_i に対して，$\exists f_i(X) = X^{s_i} + c_{i1} X^{s_i - 1} + \cdots + c_{is_i} \in S[X]$，$f_i(a_i) = 0$．$I$ の上に $c_{11}, \cdots, c_{1s_1}, c_{21}, \cdots, c_{2s_2}, \cdots, c_{ns_n}$ で生成された環を T とする．R は T 上整，かつ $a_1, \cdots, a_n$ で生成されるから，R は T-加群として有限生成．T は Noether 環であるから，その部分加群 S も T 上有限生成．ゆえに S は I 上有限生成．最後のことは明白． ▌

補題 付 1·2·3 $R = \sum_{i=0}^{\infty} R_i$ が次数付き環（R_i か i 次斉次元全体）であるとき，イデアル $M = \sum_{i=1}^{\infty} R_i$ を斉次元の集合 H が生成すれば，R は環として，R_0 上 H で生成される．したがって，R が Noether 環 $\Longleftrightarrow$ R_0 が Noether 環であって，R が R_0 上有限生成．

証明 $R_0[H] \supseteq R_i$ を i についての帰納法で示す．$i = 0$ のときは明白．$i > 0$ のとき：$f \in R_i \Rightarrow f = \sum_{\alpha=1}^{s} c_\alpha h_\alpha$ $(\exists h_\alpha \in H,\ c_\alpha \in R)$．$h_\alpha$ が斉次 d_α 次とする．c_α の代りに，c_α の斉次 $i - d_\alpha$ 次成分におきかえてもよい．すると $i - d_\alpha < i$ ゆえ，$c_\alpha \in R_0[H]$．$\therefore$ $f \in R_0[H]$．$\therefore$ $R_i \subseteq R_0[H]$． ▌

<u>（ニ）の証明：</u> τ の核を J とする．（i） J が斉次イデアルである場合について，*) （ニ）を J の大きさについての帰納法で証明することと，（ii） 一般

*) J が斉次イデアルであれば $R' = [X_1, \cdots, X_n]/J$ は自然に次数付き環になり，R' における G の作用は次数をかえないから，不変元全体が次数つき環になる．R' の 0 次斉次元全体は I である．

のJについて，Jの大きさについての帰納法で証明することとの，二段階で証明する．((ニ) が $I[X_1,,\cdots X_n]/J$ について成立しないようなJがあるときは，そのようなJのうち極大なものをえらんで，そのときの $I[X_1,\cdots,X_n]/J$ をあらためてRとするのである.) そこで，(i) については，Jが斉次イデアルで，Jより本当に大きい斉次イデアル J' について $I[X_1,\cdots,X_n]/J'$ については (ニ) は成立するものと仮定し，(ii) については斉次と限定しないで，同様の仮定をする．

(I) [(i),(ii) 共通] Sの0でない元h ((i)の場合には斉次元とする) で，R内で零因子であるものの存在する場合：$R\to R/hR$, $R\to R/(0:h)$ なる自然準同型をそれぞれ $\bar{}$, $*$ で示そう．hが斉次元のときは，$0:h$ も斉次イデアルゆえ，(i)，(ii) どちらの場合にも，$\bar{R}=R/h$, $R^*=R/(0:h)$ については，G の不変環 $\tilde{R}, R^{**}$ はそれぞれI上有限生成．(イ) により $\tilde{R}$ は $\bar{S}$ の上に，R^{**} は S^* の上に整である．ゆえに補題付 1·2·2 により，$\bar{S}, S^*$ は I 上有限生成. ∴ $\exists f_1,\cdots,f_t\in S$, $\bar{S}=I[\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_t]$, $S^*=I[f_1{}^*,\cdots,f_t{}^*]$. 次に，$S^{**}$ の S^*-加群としての生成元 $c_1{}^*,\cdots,c_u{}^*$ $(c_i\in R)$ をとる．$S=I[f_1,\cdots,f_t, hc_1,\cdots,hc_n]$ であることを示そう．$c_i{}^*$ が G-不変元であるから，$hc_i\in S$ (前節問2)．逆に，$a\in S$ とすると，$\bar{a}\in\bar{S}$ ゆえ，$\exists b\in I[f_1,\cdots,f_t]$, $\bar{a}=\bar{b}$. $a-b\in hR\cap S$. ∴ $a-b=hk$, $k \pmod{0:h}$ が G-不変元. ∴ $k^*\in S^{**}$. ∴ $\exists k_i\in I[f_1,\cdots,f_t]$, $k^*=\sum k_i{}^*c_i{}^*$. $a-b=hk=\sum hk_ic_i\in I[f_1,\cdots,f_t, hc_1,\cdots,hc_n]$. ∴ $a\in I[f_1,\cdots,f_t, hc_1,\cdots,hc_n]$. ゆえに，この場合$S$は有限生成.

(II) Sの0でない元はRの零因子でないとき：(i) の場合：0でない斉次元h(次数>0)をとる．hk $(k\in R)$ が G-不変 ⇒ k が G-不変. ∴ $hR\cap S=hS$. $S/hS=\bar{S}$ は (I) におけると同様有限生成．ゆえにSの正の次数の元全体で生成されたイデアルは有限生成．ゆえに補題 付1·2·3 によりSは有限生成．(ii) の場合：τの核Jを含む適当な素イデアルPをとれば，$P\cap S=0$. ゆえにSの商体$\subseteq$($I[X_1,\cdots,X_n]/P$ の商体)．ゆえにSの商体はI上有限生成．他方，$I[X_1,\cdots,X_n]$ 内のGの不変環をS_0とすると，(i) により S_0 は有限生成で，SはτS_0上整である．ゆえにSはI上有限生成である． ▮

ここで，定理 付1·2·1 の幾何学的意義を少し述べよう．それは代数群Gがアフィン代数多様体Vの上に有理的に作用している場合，Gの作用が半可約であ

れば，G-不変な V 上の正則有理函数——すなわち，V 上の正則有理函数であって，同一点の軌道の上では必ず同じ値をとるもの——全体のなす環が定理付1·2·1で述べた性質をもつという面から注目すれば，重要な意義のあることがわかる．その一番簡単な場合が，次の定理である．

線型代数群 $G\subseteq GL(n, \Omega)$ がアフィン空間 $A^n(\Omega)$ に，2·3節，例1と同様に定義した作用（行列による一次変換による作用）をしている場合について

定理 付 1·2·4 G の $A^n(\Omega)$ への作用が半可約であれば，$A^n(\Omega)$ の任意の G-認容な閉集合 V に対して，

（イ） V の座標環 R 内の G-不変元全体 I_V は Ω 上有限生成である．

（ロ） V における各点の G による軌道が閉集合であれば $G\backslash V$ は存在し，それはアフィン代数的集合であり，その座標環は I_V と同一視される．

証明 （イ）は定理付1·2·1（ニ）の特別な場合である．（ロ）: I_V を座標環にもつアフィン代数的集合 W をとり，V から W への自然な正則写像 φ を考える．$Q\in W$ をとれば，定理付1·2·1（ロ）により，$\exists P\in V$, $\varphi P=Q$. また，$P, P'\in V$ のとき，$GP\neq GP'$ ならば，仮定と，定理付1·2·1（ハ）とにより，$\exists f\in I_V$, $f(P)\neq f(P')$. $\therefore$ $\varphi P\neq\varphi P'$. ゆえに V 上の G による軌道全体と，W の点全体とが，φ によって導かれる対応により，一対一対応する．f が $Q\in W$ における正則有理函数であれば，f が $\forall P\in\varphi^{-1}(Q)$ で正則な G-不変有理函数であることは明白．逆に，f が $P\in V$ で正則で G-不変な有理函数であるとしよう．$D=\{x\in R|\, xf\in R\}$ をとると，D は G-認容な R のイデアルである．$J=\{x\in R|\, x(gP)=0\ (\forall g\in G)\}$ も G-認容な R のイデアルであり，その零点集合は GP. f が P で正則であることは，$D+J=R$ を示す．
$\therefore$ $\exists d\in D\cap I_V$, $1-d\in J$. すると，df, $d\in I_V$, $d(\varphi P)=d(P)=1$ となり，$f=df/d$ は φP において正則． ∎

この節の二定理からわかるように，線型代数群で，任意の有理表現により定めた作用が必ず半可約であるような群——これを**半可約群**という——は重要であるが，それら全体がどれだけであるかは，まだよくわかっていない．Ω の標数が0であれば，「根基がトーラス群である」ことが，必要充分であることがわかっている．このことが，標数に関せず正しいということが予想されている (Mumford Conjecture).

問 1 有限群は半可約である.

問 2 代数群 G と，その正規部分代数群 N とについて，

（イ） G が半可約であれば，G/N も半可約である.*)

（ロ） G/N，N が共に半可約であれば，G も半可約である.

*) このとき N も半可約である．しかしその証明は容易ではないので問としては出さない.

付録 2 交 換 子 群

付 2·1 Bear の 定 理

定理 1·4·5 の証明のために，次の定理（Baer の定理）を証明する．

定理 付 2·1·1 群 G において，N が正規部分群，H が部分群であるとき，$S=\{h^{-1}n^{-1}hn \mid h\in H,\ n\in N\}$ が有限集合であれば，交換子群 $[H, N]$ も有限群である．

証明はいくつかの段階に分けて行なう．第一段階としては：

補題 付 2·1·2 群Gの中心Zの指数nが有限であれば，$[G, G]$ は有限群である．

証明 $G=\cup_{i=1}^{n} Zg_i\ (g_i\in G)$ とすると，$\{g^{-1}h^{-1}gh \mid g,\ h\in G\}=\{g_i^{-1}g_j^{-1}g_ig_j \mid i,\ j=1, 2, \cdots, n\}$ であるから，この集合 C は有限集合である．一般に，交換子 $g^{-1}h^{-1}gh$ を $[g, h]$ で示す．$[G, G]$ の元xはCの元有限個の積であらわされる．

$$x=\Pi_{i=1}^{s}[h_i,\ k_i] \quad (h_i,\ k_i\in G).$$

ここで，一般に $g^{-1}[h, k]g=[g^{-1}kg, g^{-1}kg]$ であるから，

$$(*)\quad [h_1, k_1][h_2, k_2]=[h_2, k_2][h_2, k_2]^{-1}[h_1, k_1][h_2, k_2]=$$
$$[h_2, k_2][[h_2, k_2]^{-1}h_1[h_2, k_2], [h_2, k_2]^{-1}k_1[h_2, k_2]]$$

また，$[h, k]^n\in Z$ ゆえ，

$$(**)\quad [h, k]^{n+1}=[h, k]^n[h, k]=k[h,\ k]^nk^{-1}[h,\ k]=$$
$$k[h,\ k]^{n-1}h^{-1}k^{-1}hkk^{-1}h^{-1}k^{-1}hk=k[h, k]^{n-1}[h, k^2]k^{-1}=$$
$$[khk^{-1}, k]^{n-1}[khk^{-1}, k^2].$$

さて，このことを利用して，上の表示 $x=\Pi_{i=1}^{s}[h_i, k_i]$ において，適当な表示をすれば $s\leq n^3$ であることを示そう．あるxについて，sがいつも n^3 より大きいとする．この x について，最小の s を与える表示を考える．C の元数 $\leq n^2$ ゆえ，$[h_i,\ k_i]$ のうちに同じものがn個より多く現われるものが少くとも一つある．$i=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ について，$[h_i,\ k_i]$ が共通とする．上の $(*)$ に

より，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ は 1, 2, …, $n+1$ であるとしてよい．すると，(**) により，$\Pi_{i=1}^{n+1}[h_i, k_i]$ はCの元 n 個の積となり，s が最小であったのに反する．ゆえに $[G, G]$ の元数は有限である． ▌

第二段階：HN を G の代りに考えて，$G=HN$ と仮定してよい．$S'=\{h_1^{-1}n^{-1}h_1n \mid h_1 \in g^{-1}Hg \quad (\exists g \in G),\ n \in N\}$ とおく． $g^{-1}Hg=n_1^{-1}Hn_1$ $(\exists n_1 \in N)$ ゆえ，上のような $[h_1, n]=h_1^{-1}n^{-1}h_1n$ は $(n_1^{-1}h^{-1}n_1)n^{-1}(n_1^{-1}hn_1)n=n_1^{-1}h^{-1}n_1hh^{-1}(n_1n)^{-1}h(n_1n)=[h, n_1]^{-1}[h, n_1n]$（ただし，$h \in H$）の形になる．$S=\{[h, n] \mid h \in H, n \in N\}$ が有限集合ゆえ，S' も有限集合である．また，上の関係により，$S' \subseteq [H, N]$．ゆえに，S' は $[H, N]$ を生成する．$g^{-1}S'g=S'(\forall g \in G)$ ゆえ，$[H, N]$ は正規部分群であり，$Z^*=Z_G(S')=\{x \in G \mid xs=sx\ (\forall s \in S')\}$ の指数は有限（$\leq$(S' の元数の階乗)；S' の上の置換表現の核だから）である．すると，$Z^* \cap [H, N]$ は $[H, N]$ において，中心に含まれ，かつ指数有限である．ゆえに前補題により，$[[H, N], [H, N]]$ は有限群である．ゆえに，定理の証明のためには，$[H, N]/[[H, N], [H, N]]$ が有限群であることを示せばよい．そこで，$G/[[H, N], [H, N]]$ をGの代りに考えて，$[H, N]$ が可換群であると仮定してよい．

第三段階：($[H, N]$ が可換のとき)．$[H, [H, N]]$ がGの有限正規部分群であることを示そう．$h \in H$, $n \in N$, $u \in [H, N]$ のとき，$n^{-1}(u^{-1}h^{-1}uh)n=n^{-1}u^{-1}h^{-1}uhnh^{-1}n^{-1}nh = n^{-1}u^{-1}h^{-1}u[h^{-1}, n^{-1}]nh = n^{-1}u^{-1}h^{-1}[h^{-1}, n^{-1}]unh=n^{-1}u^{-1}h^{-1}hnh^{-1}n^{-1}unh=n^{-1}u^{-1}nh^{-1}n^{-1}unh=[n^{-1}un, h] \in [H, [H, N]]$．
$h^{-1}[H, [H, N]]h \subseteq [H, [H, N]]$ は明白ゆえ，$[H, [H, N]]$ はGの正規部分群である．さらに，N が正規部分群であるから，$u \in [H, N] \subseteq N$．ゆえに，$C^*=\{[h, u] \mid h \in H, u \in [H, N]\}$ は有限集合 S の部分集合となり，これも有限集合．さらに $[h, u]^2=h^{-1}u^{-1}hu[h, u]=h^{-1}u^{-1}h[h, u]u=h^{-1}u^{-1}hh^{-1}u^{-1}huu=h^{-1}u^{-2}hu^2 \in C^*$．したがって，$C^*$ の有限性と，可換性とにより，C^* で生成された群 $[H, [H, N]]$ が有限群であることを知る．そこで，G の代りに $G/[H, [H, N]]$ を考えることにより，$[H, [H, N]]=\{e\}$ と仮定してよい．

最後段階：(Hの元と $[H, N]$ の元とが可換の仮定の下で) $h \in H, n \in N$ のとき，$[h, n]^2=[h, n]h^{-1}n^{-1}hn=h^{-1}[h, n]n^{-1}hn=h^{-2}n^{-1}hnn^{-1}hn=[h^2, n] \in S$.

ゆえに，S の有限性と可換性とにより，S で生成された群 $[H, N]$ の有限性を知る．

付 2·2 定理 1·4·5 の証明

まず次の定理の証明から始めよう：

定理 付 2·2·1 代数群Gの部分代数群 M, N について，$MN=NM$ であれば，MN も部分代数群である．M, N の e を含む既約成分をそれぞれ M_0, N_0 とすれば，M_0N_0 が MN の既約成分になる．

証明 $MN=NM$ ならば，MN が部分群であることは，よく知られていて，易しいので，証明は省く．$M=\cup_{i=1}^{s} m_iM_0$, $N=\cup_{i=1}^{t} Nn_i$. $MN=\cup_{i,j} m_iM_0N_0n_j$. $m_iM_0N_0n_j\cap m_\alpha M_0N_0n_\alpha \neq$ 空 $\Rightarrow M_0N_0\cap cM_0N_0d \neq$空，$c=m_\alpha^{-1}m_i$, $d=n_jn_\beta^{-1} \Rightarrow \exists m\in M_0$, $\exists n\in N_0$, $mn\in cM_0N_0d = M_0cdN_0 \Rightarrow cd\in M_0N_0 \Rightarrow M_0N_0=M_0cdN_0=cM_0N_0d \Rightarrow m_iM_0N_0n_j=m_\alpha M_0N_0a_\beta$. したがって，$aM_0N_0b\,(a\in M, b\in N)$ の形の部分集合全体は MN の類別を与える．aM_0N_0b は$aM_0\times N_0b$ から自然な正則写像による像であるから，aM_0N_0b の閉包は既約であり，aM_0N_0b は，その空でない開集合を含む（定理 1·1·6）．ゆえに，$\dim aM_0N_0b=\dim MN$. M_0, N_0 で生成された部分群 L_0 をとれば，それは連結な部分代数群である（定理 1·3·6）．$MN\supseteq L_0\supseteq M_0N_0$ ゆえ，$L_0\cap aM_0N_0b$ が空でないような aM_0N_0b の和集合は L_0 になり，$L_0=M_0N_0$. ゆえに $MN=\cup_{i,j} m_iM_0N_0n_j$ は閉集合である． ▌

補題 付 2·2·2 群 Gの部分群 M, N で生成された群をLとする．$[M, N]$, $M[M, N]$ はLの正規部分群である．

証明 $m, n\in M$, $x, y\in N$ のとき，

$x^{-1}[m, n]x=x^{-1}m^{-1}n^{-1}mnx=[mx, n][x, n]^{-1}\in[M, N]$. 同様に $y^{-1}[m, n]y=[m, y]^{-1}[m, ny]\in[M, N]$ ゆえ $[M, N]$ は L の正規部分群．ゆえに，$M[M, N]=[M, N]M$ で，これは部分群，$y^{-1}my=m[m, y]\in M[M, N]$ ゆえ，$M[M, N]$ は L の正規部分群である． ▌

以上の準備の下で，定理 1·4·5 の証明をしよう．定理 1·4·5 をもう一度述べると：

代数群Gの部分代数群 H, K について，

HとKとで生成された部分群 $H\vee K$ が代数群$\Longleftrightarrow[H, K]$ が代数群.

証明 $\Leftarrow$の証: $[H, K]$ が部分代数群であるとする. 補題付 2・2・2 により, $[H, K]$ は $H\vee K$ の正規部分群である. ゆえに 定理付 2・2・1 により $H[H, K]$ は代数群である. これは $H\vee K$ の正規部分群 (前補題). ゆえに, $(H[H, K])K$ も代数群 (定理 付2・2・1). 明らかに $(H[H,K])K=H\vee K$.
$\Rightarrow$の証: 逆に $H\vee K$ が代数群であるとする. $G=H\vee K$ としてよい. H, K の e を含む既約成分をそれぞれ H_0, K_0 とする. $[H, K_0]$, $[H_0, K]$, $[[H, K], K_0]$ は連結代数群である (定理 1・4・1). この三つの群の共役全体で生成した部分群 M は連結代数群である (定理 1・3・6). $G=H\vee K$ としたから, $[H, K]$ は正規部分群であり (前補題), $M\subseteq[H, K]$. あと $[H, K]/M$ が有限群であることを示せばよい. G/M を考えることにより, $M=\{e\}$ と仮定してよい. すると, $[H_0, K]=[H, K_0]=[[H, K], H_0]=\{e\}$. ゆえに, H_0, K_0 は $G=H\vee K$ の正規部分群である. $N=[H,K]K$ とおく. G から G/H_0 への自然準同型を φ とする. $\varphi G/\varphi K_0$ は $\varphi HK_0/\varphi K_0$ と $\varphi K/\varphi K_0$ とで生成される, すなわち, 有限生成の代数群であるから, 有限群である. 次に, φH と φN とを考える. $\varphi C=\{h^{-1}n^{-1}hn \mid h\in\varphi H,\ n\in\varphi N\}$ を考えると, (イ) $h\in\varphi H_0\Rightarrow h^{-1}n^{-1}hn=e$ と, (ロ) $\varphi G/\varphi K_0$ が有限群, の二つから, φC が有限集合になる. φN が正規部分群ゆえ, $\varphi[H, N]$ が有限群になる (定理 付 2・1・1). ゆえにその部分群 $\varphi[H, K]$ は有限群で, φG の正規部分群. ゆえに, $\varphi([H, K]H)$ も有限群である. 次に, $N^*=[H, K]H$ と K とを考える. N^* は正規部分群である. $C^*=\{n^{-1}k^{-1}nk \mid n\in N^*,\ k\in K\}$ を考えると, φN^* が有限群であることにより, C^* は有限集合になる. ゆえに, $[N^*, K]$ が有限群. ゆえに $[H, K]$ が有限群になる. ▮

問 Gが代数群, H, K が部分代数群であるとき, 次の各々は部分代数群である.

(イ) Hを含む最小の正規部分群 H^*.

(ロ) $HK=KH$ であるときの $[H, K]$.

(ハ) Hが連結であるとき, HとKとで生成された部分群 $H\vee K$.

付録 3　外積環と Plücker 座標

付 3・1　外　積　環

可換環 A の上の加群 M が与えられたとき，次の性質をもつ（可換とは限らない）環 E を M の**外積環**といい，$E_A(M)$ で示す．$E_A(M)$ における乗法を**外積**という．外積は記号 $\wedge$ を用いるのが普通である（a と b との外積が $a\wedge b$ のように）．E_i の元を E の i 次斉次元という．

（i） E の中心は A を含む．

（ii） E は A-加群として，$E_0=A$, $E_1=M$, E_2, …, E_n, …の直和であり，各 i, j について $E_iE_j\subseteq E_{i+j}$. [$\wedge$ を用いるなら，$E_i\wedge E_j\subseteq E_{i+j}$ と書くことになる.]

（iii） 環として，E は A と M で生成される.

（iv） $b\in M \Rightarrow b^2=0$ [$b\wedge b=0$].

（v） 環 E' が上の（i）〜(iv) における E の性質をもてば，E から E' の上への，環としての準同型で，A, M の上では恒等写像であるものが存在する.

定理 付 3・1・1　上のような A, M に対して，外積環 $E_A(M)$ は存在し，それは同型の意味で一意的である.

証明　集合 X を，X から M の上への一対一対応 ψ があるようにとる．A を中心として，X の元で自由生成した環 Y を考える．[すなわち，$ax_1\cdots x_m$ ($a\in A$, $x_i\in X$) の形の元の有限和の型の元を（形式的に）作り，$(ax_1\cdots x_m)(a'x_1'\cdots x_m')=(aa')x_1\cdots x_nx_1'\cdots x_m'$ であるように積を定めて作った環を Y とする．$x_1x_2\neq x_2x_1$ ($x_1\neq x_2$, $x_1, x_2\in X$)]．（v）の E' について，Y から E' の上への準同型 $\varphi_{E'}$ で，$\varphi_{E'}(a)=a$ ($\forall a\in A$), $\varphi_{E'}(x)=\psi(x)$. なるものがある．その核 $K_{E'}$ は $(\sum_{i=1}^s a_ix_i)^2$ ($a_i\in A$, $x_i\in X$) の形の元をすべて含む．Y において，$(\sum_{i=1}^s a_ix_i)^2$ の形の元全体で生成したイデアル I をとり，Y/I を作れば，I の元は X の元について 2 次以上の項ばかりから成るから，$Y/I=E$ は定理の条件をみたす．E^* が定理の E の条件をみたせば，

$^\exists\varphi_{E^*}$. また，(v) により E^* から E への準同型もあり，φ_{E^*} は同型である．▌

補題 付 3・1・2 上の記号の下で，$b, c \in M \Rightarrow b\wedge c = -c\wedge b$.

証明 $0=(b+c)\wedge(b+c)=b\wedge b+b\wedge c+c\wedge b+c\wedge c=b\wedge c+c\wedge b$. ▌

問 1 環 R において，「$x\in R$, $2x=0\Rightarrow x=0$」が成立するとき，(例えば，R が標数 $\neq 2$ の体を含むときはそうである)，R の部分集合 M について，「$x, y\in M\Rightarrow xy=-yx$」が成り立てば，$\forall x\in M$, $x^2=0$.

問 2 上の記号 A, M について，B が M の A-加群としての生成系であれば，$E_A(M)$ は A と B とで生成される．上の定理の X として，B と一対一対応する集合をとって，同様にして Y, I を作れば，Y/I として $E_A(M)$ が得られる．

本書では，A が体，M が有限生成のときだけで充分であるので，以後その場合を考察する．M の一次独立基 $e_1, \cdots, e_m$ をとる．$e_i\wedge e_i=0\ (\forall i)$ ゆえ，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$ において，$i_1, \cdots, i_s$ のうちに互に等しいものがあれば，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}=0$. 次に，$i_1, \cdots, i_s$ が互に異なるときを考えよう．$(i_1, \cdots, i_s)$ の順列 $(j_1, \cdots, j_s)$ をとったとき，置換 $\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_s \\ j_1 \cdots j_s \end{pmatrix}$ の符号 ε (偶置換のとき 1，奇置換のとき -1) により，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}=\varepsilon e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_s}$ であることは，上の補題により知られる．そこで，$I_s=\{(i_1, \cdots, i_s)\,|\, i_1<i_2<\cdots<i_s$ (m 以内の自然数ばかり)$\}$ とおけば，$E_A(M)$ の s 次斉次元全体の加群 E_s は $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}\,|\,(i_1, \cdots, i_s)\in I_s\}$ で生成されることがわかる．さらに，

定理 付 3・1・3 上で述べた $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}\,|\,(i_1, \cdots, i_s)\in I_s\}$ は一次独立である．ゆえに，E_s の A-加群としての長さ (次元) は $\binom{m}{s}$ であり，$E_A(M)$ のそれは $\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}=2^m$ に等しい．$0=E_{m+1}=E_{m+2}=\cdots$.

証明 $0=E_{m+1}=E_{m+2}=\cdots$ は明白．記号の集合 $B_s=\{e(i)\,|\,(i)\in I_s\}$ を一次独立基にもつ A-加群 E_s^* を作り，次に $E^*=A+E_1^*+\cdots+E_m^*$ (直和) に乗法を，

$$e(i_1, \cdots, i_s)e(j_1, \cdots, j_t)=$$

$$\begin{cases} 0 & \{i_1, \cdots, i_s\}\cap\{j_1, \cdots, j_t\} \neq \text{空のとき} \\ \pm e(l_1, \cdots, l_{s+t}) & \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_s, j_1, \cdots, j_t \\ l_1 \cdots\cdots\cdots\cdots l_{s+t} \end{pmatrix} \text{が}\begin{matrix}\text{奇置換のとき}-\\ \text{偶置換のとき}+\end{matrix} \end{cases}$$

であるように定める．すると E^* が環になり，外積環の条件 (i)～(iv) をみたすことは容易にわかる．定理の前に述べたことから，E^* から $E_A(M)$ への準同型があることがわかり，したがって $E^*\cong E_A(M)$. ▌

行列式との次の関係は重要である.

系 付 3・1・4　上の記号の下で, $b_i=\sum_j c_{ij}e_j$ $(c_{ij}\in A)$ ならば, $b_1\wedge\cdots\wedge b_m=de_1\wedge\cdots\wedge e_m$, ここに,

$$d=\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots c_{mm}\end{pmatrix}$$

証明　$b_1\wedge\cdots\wedge b_m=\sum c_{1\alpha_1}\cdots c_{m\alpha_m}(e_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{\alpha_m})$ ゆえ, 行列式の定義により容易. ▌

系 付 3・1・5　$b_1,\cdots,b_s\in M$ について, これらが一次独立 $\Longleftrightarrow b_1\wedge\cdots\wedge b_s=0$.

証明　一次従属のとき: 例えば $b_s=\sum_{i<s}c_ib_i$ ならば, $b_1\wedge\cdots\wedge b_s=\sum c_i(b_1\wedge\cdots\wedge b_{s-1})\wedge b_i=0$. 一次独立のとき: $b_1,\cdots,b_s$ を含む M の一次独立基 $b_1,\cdots,b_m$ をとれば, $b_1\wedge\cdots\wedge b_m\neq 0$. ∴ $b_1\wedge\cdots\wedge b_s\neq 0$. ▌

付 3・2　Plücker 座標

前と同様に, A が体, M が A-加群で, $e_1,\cdots,e_m$ が M の一次独立基であるものとする. $I_s=\{(i_1,\cdots,i_s)\mid i_1<i_2<\cdots<i_s\}$ は前と同様にとる. M の部分加群 S で, $\mathrm{length}_A S=s$ (ベクトル空間として s 次元) であるものに対して, $\binom{m}{s}-1$ 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^N$ $\left(N=\binom{m}{s}-1\right)$ の点を次のように対応させる: S の一次独立基 $b_1,\cdots,b_s$ をとり, $b_1\wedge\cdots\wedge b_s=\sum_{(i_1,\cdots,i_s)\in I_s}p_{i_1\cdots i_s}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s})$ を考える. I_s の元をならべる順序は, あらかじめ固定しておき, その順で係数 $p_{i_1\cdots i_s}$ をならべて得られる $\boldsymbol{P}^N$ の点を S に対応させる. あとで示すように (定理付 3・2・2～3), この対応は S 全部の集合 L_s と $\boldsymbol{P}^N$ 内の射影多様体との一対一対応になる. この $p_{i_1\cdots i_s}$ の組を S の **Plücker 座標** という. 便宜上, m 以内の自然数 s 個の組 $j_1,\cdots,j_s$ についても $p_{j_1\cdots j_s}$ は,

(イ)　$j_1,\cdots,j_s$ の中に互に等しい数があれば $p_{j_1\cdots j_s}=0$,

(ロ)　そうでないときは $j_1,\cdots,j_s$ が $i_1,\cdots,i_s$ の偶置換, 奇置換であるに従って, $p_{i_1\cdots i_s}$, $-p_{i_1\cdots i_s}$ と定める. それは次の定理の結果を, より合理的にするのに役立つ.

定理 付 3・2・1　上の記号の下で, $b_i=\sum_j c_{ij}e_j$ であるとき,

$$p_{i_1\cdots i_s}=\det\begin{pmatrix} c_{1i_2}c_{1i_1}\cdots\cdots c_{1i_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{si_1}c_{si_2}\cdots\cdots c_{si_s}\end{pmatrix}$$

証明 $b_1\wedge\cdots\wedge b_s=(\sum c_{1j}e_j)\wedge\cdots\wedge(\sum c_{sj}e_j)$. この展開における $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$ の係数を考えれば，行列式の定義により明白. ▌

定理 付 3·2·2 上で与えた，S の集合 L_s から $\boldsymbol{P}^N$ $(N=\binom{m}{s}-1)$ の中への対応を ψ とすると，ψ は一対一対応である. 換言すれば，（イ） S の一次独立基をとりかえても，$p_{i_1\cdots i_s}$ の組の比は変らない（したがって，ψ は写像になる)，（ロ） $S'\in L_s$, $\psi S=\psi S' \Rightarrow S=S'$.

証明 $b_1^*,\cdots,b_s^*$ が，S の，他の一次独立基であるとき，$b_i^*=\sum_j c_{ij}b_j$ $(c_{ij}\in A)$ と表わし得る. ゆえに $b_1^*\wedge\cdots\wedge b_s^*=(\sum c_{1j}b_j)\wedge\cdots\wedge(\sum c_{sj}b_j)=\det(c_{ij})(b_1\wedge\cdots\wedge b_s)$. ゆえに，$b_1^*,\cdots,b_s^*$ で得られる $p_{i_1\cdots i_s}$ は $b_1,\cdots,b_s$ によるものの $\det(c_{ij})$ 倍になる. 次に $\psi S=\psi S'$ としよう. S' の一次独立基を $b_1',\cdots,b_s'$ とすると，$\psi S=\psi S'$ は $b_1'\wedge\cdots\wedge b_s'=d(b_1\wedge\cdots\wedge b_s)$ $(\exists d\in A)$ を意味する. $\therefore$ $b_i\wedge b_1'\wedge\cdots\wedge b_s'=0$. $\therefore$ $b_i\in S'$（系付 3·1·5). $\therefore$ $S\subseteq S'$. $\therefore$ $S=S'$. ▌

定理 付 3·2·3 上の記号の下で，A が万有体 Ω であるとす，ψL_s は $\boldsymbol{P}^N$ の中の射影多様体である.*)

証明 まず，$\{x_{ij}|\, i=1,\cdots, m;\ j=1,\cdots,m\}$ が素体の上に代数的独立とし，$g_i=\sum_j x_{ij}e_j$ $(i=1,\cdots, m)$ によって生成される部分加群 S_0 の Plücker 座標 $\{p^{(0)}_{i_1\cdots i_s}|\,(i_1,\cdots,i_s)\in I_s\}$ から考察し始めよう. 行列

$$T=\begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\cdots\cdots x_{1s} \\ x_{21}\ x_{22}\cdots\cdots x_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{s1}\ x_{s2}\cdots\cdots x_{ss}\end{pmatrix}$$

の逆行列 $T^{-1}=(y_{ij})$ をとり，$g_i'=\sum_j y_{ij}g_j$ とおき，$g_i'=\sum_j z_{ij}e_j$ によって z_{ij} を定める.

$j\leq s$, $i\neq j \Rightarrow z_{ij}=0$; $z_{ii}=1$ であることは，

*) その次元は $s(m-s)$ である. 定理付 3·2·4 のすぐ後の問参照.

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_s' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} T & x_{1,s+1} \cdots x_{1m} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_{s,s+1} \cdots x_{sm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

からわかる．$g_1', \cdots, g_s'$ によって得られる Plücker 座標は $\{\det T^{-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} | (i_1, \cdots, i_s) \in I_s\}$（前定理の証明）．ゆえに定理 付3·2·1 により，

$$(\det T)^{-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} = \det\begin{pmatrix} z_{1i_1} \cdots\cdots z_{1i_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{si_1} \cdots\cdots z_{si_s} \end{pmatrix}$$

特に，$(i_1, \cdots, i_s) = (1, 2, \cdots u-1, u+1, \cdots, s, t)$ $(0 \leq u \leq s < t)$ のときを考えると，$z_{ij} = 0$ $(i \neq j \leq s)$，$z_{ii} = 1$ により

$(\det T)^{-1}p^{(0)}_{1, \cdots, u-1, u+1, \cdots, s, t} = (-1)^{s-u}z_{ut}$．ゆえに，$i_\alpha \leq s < i_{\alpha+1}$ とすると，

$$(\det T)^{-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} = \det\begin{pmatrix} z_{1i_1} \cdots\cdots z_{1i_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{si_1} \cdots\cdots z_{si_s} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} z_{1i_1} \cdots z_{1i_\alpha} (-1)^{s-1}(\det T)^{-1}p^{(0)}_{2\cdots si_{\alpha+1}} \cdots (-1)^{s-1}(\det T)^{-1}p^{(0)}_{2\cdots si_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{si_1} \cdots z_{si_\alpha} (\det T)^{-1}p^{(0)}_{1\cdots s-1i_{\alpha+1}} \cdots\cdots (\det T)^{-1}p^{(0)}_{1\cdots s-1i_s} \end{pmatrix}$$

ゆえに $(\det T)^{s-\alpha-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} = (p^{(0)}_{12\cdots s})^{s-\alpha-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s}$ が $p^{(0)}_{1, \cdots, u-1, u+1, \cdots, s, i_\beta}$ $(u = 1, 2, \cdots, s;\ \beta \geq \alpha+1)$ の整式で表わし得る．この関係式を

$$(*)\qquad (p^{(0)}_{1\cdots s})^{s-\alpha-1}p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} = F_{i_1\cdots i_s}(p^{(0)}_{2\cdots si_{\alpha+1}}, \cdots, p^{(0)}_{1\cdots s-1, i_s})$$

としよう．x_{ij} が代数関係をもたないときでも，上のような関係があるのだから，上の関係式を x_{ij} についての式と考えてれば，恒等整式である．ゆえに，x_{ij} に　A　のどんな元を代入しても，同じ関係が成り立つ．今は，$1, 2, \cdots, s$ を固定して考えたが，任意の $(j_1, \cdots, j_s) \in I_s$ を上の $1, 2, \cdots, s$ の代りにとって，同様な計算をすれば，あるいは，もっと代数的に考えることにして，π を $(1, 2, \cdots, m$ の任意の置換とするとき，$x_{ij} \to x_{i, \pi j}$ なる同型を考えることにより，(*) と同じ型（ただし，$p^{(0)}_{j_1\cdots j_s}$ の符号の調節を要するが）の関係式

$$(**)\qquad (p^{(0)}_{l_1\cdots l_s})^{s-\beta-1}\, p^{(0)}_{i_1\cdots i_s} = F^{l_1\cdots l_s}_{i_1\cdots i_s}(p^{(0)}_{l_2\cdots l_s i_{\beta+1}}, \cdots, p^{(0)}_{l_1 l_{s-1} i_s})$$

を得る．これら関係式をみたす $\boldsymbol{P}^N$ $\left(N = \binom{m}{s} - 1\right)$ の点の全体 V をとれば，

$\psi L_s \subseteq V$. 逆に $p=(\cdots, p_{i_1\cdots i_s}, \cdots)\in V$ を任意にとる. $p_{l_1\cdots l_s}\neq 0$ なる $(l_1,\cdots, l_s)\in I_s$ をとる. すると, V の点ゆえ, (**) の関係式 ($p^{(0)}$ を p にして) が成立する. 本質的には, 番号の組 $(l_1,\cdots,l_s)$ の差異は対称であるから, $(l_1,\cdots, l_s)=(1,\cdots,s)$ のときの説明をしよう. (*) の右辺を得たのを逆にたどれば, $j>s$ について, $z_{ij}=(-1)^{s-i}p_{1\cdots s}^{-1}p_{1\cdots-1i,i+1,\cdots s,j}$; $z_{ii}=1$; $z_{ij}=0$ $(i\neq j\leq s)$ とおけば,

$$p_{1\cdots s}^{-1}p_{i_1\cdots i_s}=\det\begin{pmatrix} z_{1i_1}\cdots z_{1i_s}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ z_{si_1}\cdots z_{si_s}\end{pmatrix}$$

となり, p は $\sum_j z_{ij}e_j$ $(i=1,\cdots,s)$ によって生成される部分分群に対応する点になる. ゆえに $\psi L_s=V$. 次に, V は $(ms-1)$ 次元射影空間 (座標系 $(\cdots, x_{ij},\cdots)$) の開集合 (rank $(x_{ij})<s$ なる部分を除いたもの) からの正則写像による像と考えられるから, 既約である. ゆえにVは射影多様体である. ∎

次に, M の一次変換による Plücker 座標の変換を考えよう. M の一次変換が, m 次行列U ($\det U\neq 0$) により, $\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}\to U\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}$ で与えられたとすれば,
$\begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1m}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ c_{s1}\cdots c_{sm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}\to (c_{ij})U\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}$ と変わるから, それに従って Plücker 座標が変化する (定理 付 3・2・1). ゆえに,

定理 付 3・2・4 Aが万有体Ωであるとき, $GL(m,A)$ の $V=\psi L_s$ 上への作用は有理作用である.

問 1 上記の V が, その一点の $GL(m, A)$ による軌道と一致することを確かめ, $\dim V=s(m-s)$ であることを示せ.

以上, 部分加群の Plücker 座標を考えた. 本質的には同じではあるが, 射影空間の線型部分空間について, それを適用する. すなわち, Aが万有体Ωであるとき Mは $m-1$ 次元射影空間に対応し, L_s は $\boldsymbol{P}^{m-1}$ の $s-1$ 次元線型部分空間全体 $\bar{L}_s$ に対応する. $S\in L_s$ が定める $s-1$ 次元部分空間 $\bar{S}$ の Plücker 座標は, S の Plücker 座標と定め, これにより $\bar{L}_s$ を $\boldsymbol{P}^N$ $\left(N=\binom{m}{s}-1\right)$ の射影多様体と考えるのである. $\bar{S}$ を張る一次独立な点が $(a_{i0},\cdots,a_{i,m-1})$

$(i=0,\cdots,s-1)$ であるとき，$\bar{S}$ の Plücker 座標 $p_{i_0\cdots i_{s-1}}(0\leq i_\alpha\leq m-1)$ は次により与えられる．

$$p_{i_0\cdots i_{s-1}}=\det\begin{pmatrix} a_{0i_0}\cdots\cdots a_{0i_{s-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s-1i_0}\cdots a_{s-1i_{s-1}} \end{pmatrix}$$

問 2　$A=\Omega$, M は上の通りとする．M の一次独立基 $e_1,\cdots,e_m$ も固定しておく．このとき，M における元の間の関係⊥を，$(\sum a_ic_i)\perp(\sum b_ic_i)\Longleftrightarrow\sum a_ib_i=0$ によって定める．このとき，部分加群 S $(\mathrm{length}_A S=s)$ について，$S^\perp=\{a\in M|\ a\perp x\ (\forall x\in S)\}$ は，よく知られているように，部分加群であり，$\mathrm{length}_A S^\perp=m-s$．この $S^\perp$ の Plücker 座標を S の**双対 Plücker 座標**という．この双対 Plücker 座標について，次のことを示せ．

$L_s\ni S$ に対して，双対 Plücker 座標により，$\boldsymbol{P}^N$ $\left(N+1=\binom{m}{m-s}=\binom{m}{s}\right)$ の中の点に対応させれば，この対応 ψ^* は L_s と $\boldsymbol{P}^N$ の中の適当な射影多様体 V^* との一対一対応になる．*)

付 3・3　旗　多　様　体

A, M は前節の通りとする．$s<m$ として L_s, I_s だけでなく L_{s+1}, I_{s+1} も同様に定義する．$S\in L_s$, $S'\in L_{s+1}$ について，$S\subseteq S'$ なる条件が Plücker 座標に関して，どのような条件になるかを考察することにする．

$S\subseteq S'$ とする．S の一次独立基 $b_i=\sum_j c_{ij}e_j$ $(i=1,\cdots,s)$ と，S' の元 $b_0=\sum_j c_{0j}e_j\notin S$ とをとれば，S, S' の Plücker 座標 p, p' は次式で与えられる（定理付 3・2・1）．

$$p_{i_1\cdots i_s}=\det\begin{vmatrix} c_{1i_1}\cdots\cdots c_{1i_s} \\ c_{2i_1}\cdots\cdots c_{2i_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{si_1}\cdots\cdots c_{si_s} \end{vmatrix};\quad p'_{i_0\cdots i_s}=\det\begin{vmatrix} c_{0i_0}\cdots\cdots c_{0i_s} \\ c_{1i_0}\cdots\cdots c_{1i_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{si_0}\cdots\cdots c_{si_s} \end{vmatrix}$$

ゆえに，次の関係がある：

$$(*)\quad p'_{i_0\cdots i_s}=\sum(-1)^\alpha c_{0i_\alpha}p_{i_0\cdots i_{\alpha-1}i_{\alpha+1}\cdots i_s}\quad ((i_0,\cdots,i_s)\in I_{s+1})$$

これを $c_{00},\cdots,c_{0m}$ についての一次連立方程式と見る．便宜上，係数の行列を C で表わすことにより，

*)　$V=\psi L_s$ を前の通りにとれば，$\psi^*\psi^{-1}$ は V から V^* への双正則写像になる．

$$(**)\qquad C\begin{pmatrix} c_{00} \\ \vdots \\ c_{0m} \end{pmatrix} = (p')$$

と表わしておこう．斉次にした方程式

$$(***)\qquad C\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

の解 $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ は S の元 $\sum x_i e_i$ と一対一に対応する．ゆえに，$\mathrm{rank}\ C = m-s$.

ゆえに，(**) が解をもつための必要十分条件は

$$(\triangle)\qquad \mathrm{rank}\ (C\ (p')) \leqq m-s.$$

いいかえれば，行列 $(C, (p'))$ の $m-s+1$ 次小行列式がいずれも 0 ということが条件になる．

逆に，この条件がみたされれば，(**) をみたす $c_{00}, \cdots, c_{0m}$ があり，p' が適当な S' ($\in L_{s+1}$, $S \subseteq S'$) の Plücker 座標になる．ゆえに，

定理 付 3·3·1 $S \in L_s, S' \in L_{s+1}$ について，$S \subseteq S'$ なる条件は，Plücker 座標についての代数関係式によって示し得る．それは上の ($\triangle$) によって与えられる．

次に，L_s, L_{s+1} を，前節におけるように，Plücker 座標により，$\boldsymbol{P}^N$, $\boldsymbol{P}^{N'}$ $\left(N = \binom{m}{s} - 1,\ N' = \binom{m}{s+1} - 1\right)$ に対応させて，ψL_s, ψL_{s+1} を考えると

系 付 3·3·2 A が万有体 Ω であるとき，$W = \{(\psi S) \times (\psi S') \mid S \in L_s,\ S' \in L_{s+1}, S \subseteq S'\}$ は射影多様体になる．同様にして，$\psi L_1, \psi L_2, \cdots, \psi L_{m-1}$ 全体を考えれば，$W^* = \{(\psi S_1) \times (\psi S_2) \times \cdots \times (\psi S_{m-1}) \mid S_i \in L_i,\ S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_{m-1}\}$ は射影多様体になる．

上の W^* が $\boldsymbol{P}^{m-1}$ における旗多様体と（本質的に）同じであることは，前節最後で述べたことからわかる．ゆえに

定理 付 3·3·3 旗多様体は射影多様体である．

問のヒントまたは解答

第1章

1·1 節

問 1　後半: 線分

問 2　イデアルを考えよ.

1·2 節

問 3　$\begin{cases} f_{\alpha\beta}(x, a) = \sum_j x_{\alpha j} a_{j\beta} & ((\alpha,\ \beta)\ \text{成分に関する分}) \\ g(x, a) = g(x)\, g(a) & (\text{行列式の逆数に関する分}) \end{cases}$

1·3 節

問 1　$g^{-1}Hg = H \Rightarrow (g^{-1}Hg)^* = H^*$.

問 2　$g \in G \Rightarrow g^{-1}Hg = H \supseteq H_0 \ni e$,　$g^{-1}Hg \supseteq g^{-1}H_0 g \ni e$.

1·4 節

問 2　前半：系 1·4·6 (イ) の証明のまねをする. 詳細は定理 付2·2·1.
後半：定理 1·4·5 による.

1·5 節

問 1　定理の (ロ) の証明において, $\bar{H}$ の代りに $\bar{G} = G/Z_G(G)$ $(G = GL(n, K))$ をとる. $\bar{N}$ が $\bar{G}$ の正規部分群 $\neq \{\bar{e}\} \Rightarrow \bar{G} \supseteq [\bar{H},\ \bar{H}] = \bar{H}$ が同様にいえる. ゆえに, Nが G の正規部分群 $\not\subseteq Z_G(G)$ のとき, まず $NZ_G(G) \supseteq H = SL(n,\ K)$. $NZ_G(G)/N \cong Z_G(G)/(N \cap Z_G(G))$ は可換ゆえ, $N \supseteq [NZ_G(G),\ NZ_G(G)] \supseteq [H,\ H] = H$.

問 2　扱った部分群全部.

第2章

2·3 節　定理 2·3·5 の証明のまねをすればよい.

第3章

3·2 節

問 1　$T \cong D(r)$. $D(r)$ の元 $a = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}$ について, どの a_i も, また, どの a_i/a_j $(i \neq j)$ も 1 のべき根でないようにとれば, a を含む最小の代数群は $D(r)$ になる (定理 3·2·2 (の証明) を利用).

3·3 節

問 1 (イ) $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}$ を考えよ.

問 2 (イ) $\begin{pmatrix}1&a\\0&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&t^{-1}\end{pmatrix}$ を考えよ.

3·7 節

問 2 (イ)⇒(ロ) は明白. (ロ)⇒(ハ) は補題 3·7·9 と定理 3·6·1. (ハ)⇒(イ) : G/T はユニポテントゆえ, $G=TG_u$. $T\subseteq Z_G(G)$ ゆえ, G_u の べき零性から G の べき零性が出る.

3·8 節

問 定理 3·8·5 により, ∃Borel 部分群 B, $s\in B$. これと, 補題 3·6·5 を利用.

付録 1

付 1·2

問 1 有限群Gが環Rの作用環, $x\in R$ ならば, $\Pi_{g\in G}\,gx$ は G-不変元.

問 2 (イ) G/N の表現はGの表現でもある. (ロ) Gが環Rに作用, MがG 既容な有限生成の部分群, $x\in R$, $x \bmod M$ が G-不変とする. N の半可約性により, $f=x^d+c_1x^{d-1}+\cdots+c_d$ (c_i は M の元について i 次斉次式) で N-不変なものがある. R の N-不変元全体Sにおいて, G の作用は G/N の作用であり, そこで $f^\alpha+h_1f^{\alpha-1}+\cdots+h_\alpha$ (h_α は $\{\sigma f-\sigma' f|\sigma,\ \sigma'\in G\}$ で生成された加群の元について i 次斉次式) の形の G-不変元を得る.

索　　引

アーベル群

—ア 行—

—カ 行—

—サ 行—

—タ 行—

—ナ 行—

—ハ 行—

—マ 行—

—ヤ 行—

代数群

—ア 行—

—カ 行—

—サ 行—

一タ 行一

一ハ 行一

一マ 行一

一ヤ 行一

一ラ 行一

——著者紹介——

本田欣哉（ほんだ きんや）

最終学歴　1947年，東京大学理学部数学科卒

専　　攻　群　論

現　　在　立教大学名誉教授・理博

著　　書　「代数学」（黒須氏と共著，共立全書）

永田雅宜（ながた まさよし）

最終学歴　1950年，名古屋大学理学部数学科卒

専　　攻　代数幾何学

現　　在　京都大学名誉教授・理博

著　　書　Local Ring (John Wiley)，抽象代数への入門（朝倉），近代代数学（共著，共立出版），代数幾何学（共著，共立出版），理工科系 代数学と幾何学（共著，共立出版），可換体論（裳華房）

検印廃止

復刊　アーベル群・代数群

1969年3月20日　初版1刷発行
1975年9月15日　初版3刷発行
1999年7月15日　復刊1刷発行
2007年12月10日　復刊2刷発行

著　者　本田欣哉
　　　　永田雅宜

発行者　南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　望月節男
東京都新宿区市谷本村町3丁目29番地

NDC 411.65

発行所　共立出版株式会社
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京3947局2511番（代表）
郵便番号112-8700
振替口座 00110-2-57035

印刷・新日本印刷　製本・中條製本

Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会　員

ISBN 4-320-01622-X